



FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
Universidad de CHILE
Cálculo en varias variables - Verano 2007
Profesor: Marcelo Leseigneur
Auxiliar: Julio Deride

Control 2

P1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- Estudie la continuidad de f en \mathbb{R}^2 .
- Encuentre las derivadas parciales de f y estudie su continuidad en \mathbb{R}^2 .
- Estudie la diferenciabilidad de f en \mathbb{R}^2 .
- Encuentre la ecuación del plano tangente a f en el punto $(\pi, 1, 0)$.
- Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva de nivel 0 en el punto $(\pi, 1)$.

P2. a. Sea $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \frac{x'Ax}{x'x}$, donde A es una matriz simétrica de coeficientes reales de $n \times n$. Si x_0 verifica $\nabla g(x_0) = 0$, demuestre que $Ax_0 = g(x_0)x_0$. Interprete. ¿Qué sucede si A no es simétrica?

b. Sea $F : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{e^{-xt^2}}{t} dt$.

- Encuentre $F'(x)$.
- Claramente $F(x) \geq 0$, $\forall x \geq 1$. Explique por qué F está acotada en $[1, \infty)$.

Indicación:

■ Considere $G(u, v, w) = \int_u^v \frac{e^{-wt^2}}{t} dt$.

- Asuma que se cumplen las hipótesis para aplicar regla de Leibniz:

Si $\phi(x) = \int_a^b f(x, t) dt$ con $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ entonces

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t) dt.$$

P3. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable. Suponga que se tiene la **Relación de Euler**:

$$\langle x, \nabla f(x) \rangle = r f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{R}.$$

Se pide:

- Muestre que $t \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) x_i = r f(tx) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$
- Calcule $\frac{d}{dt} \left(\frac{f(tx)}{t^r} \right).$
- Concluya que $f(tx) = t^r f(x) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{R}.$
Por otro lado, si f cumple (c) se dice homogénea de grado r . Pruebe que bajo esa condición se cumple la relación de Euler.
- Sean f y g dos funciones reales de variable real, derivables en \mathbb{R} . Se define la función:

$$z(x, y) = x^2 y f\left(\frac{x}{y}\right) + x y^2 g\left(\frac{y}{x}\right)$$

Calcule

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}$$

- Sea la función

$$f(x, y) = \frac{3x^2 + xy - y^2}{(xy + x^2)^{\frac{1}{4}}}, \text{ con } x, y > 0$$

Calcule

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}$$

3 horas.

Pauta.

- P1.** a. Si $x \neq 0$, f es continua por álgebra de funciones continuas. Para $x = 0$ se tiene que

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(xy)}{x} \\ &= y \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(xy)}{xy} \\ &= y \\ &= f(0, y)\end{aligned}$$

por lo tanto es continua $\forall x \in \mathbb{R}^2$.

- b. Se tiene, $x \neq 0$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{xy \cos(xy) - \sin(xy)}{x^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \cos(xy)\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, y) - f(0, y)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(hy)}{h} - y}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(hy) - hy}{h^2} \\ &= \frac{y^2}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(hy) - 1}{hy} \\ &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, y + h) - f(0, y)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(y + h) - y}{h} \\ &= 1\end{aligned}$$

Con lo cual

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{xy \cos(xy) - \sin(xy)}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \cos(xy) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Además

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy \cos(xy) - \sin(xy)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y \cos(xy) - xy^2 \sin(xy) - y \cos(xy)}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-y^2 \sin(xy)}{2} \\ &= 0 \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(0, y) \quad \text{por lo tanto continua.} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \lim_{x \rightarrow 0} \cos(xy) \\ &= 1 \\ &= \frac{\partial f}{\partial y}(0, y) \quad \text{por lo tanto continua.} \end{aligned}$$

- c. Dado que las derivadas parciales de f son continuas en \mathbb{R}^2 , se concluye que f es diferenciable en \mathbb{R}^2 .
- d. Sabemos que

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in G_f &\Leftrightarrow f(x, y) = z, \\ &\Leftrightarrow f(x, y) - z = 0, \text{ definiendo } F(x, y, z) = f(x, y) - z, \\ &\Leftrightarrow F(x, y, z) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x, y, z) \in S_0 F \end{aligned}$$

con lo cual un punto del grafo de f corresponde a un punto de la superficie de nivel de F . Así, un vector normal al grafo corresponderá a un vector normal a la superficie de nivel. Sabemos que el gradiente es un vector

ortogonal a la superficie de nivel, con lo cual, debemos calcular:

$$\begin{aligned}\nabla F(x, y, z) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial z} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{xy \cos(xy) - \sin(xy)}{x^2} \\ \cos(xy) \\ -1 \end{pmatrix} \\ \nabla F(\pi, 0, 1) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\pi} \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

de donde, la ecuación del plano tangente viene dada por

$$\langle x - x_o, n \rangle = 0 \Leftrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} x - \pi \\ y - 1 \\ z - 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\pi} \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

e. Análogamente, un vector normal a la superficie de nivel de f será el gradiente. Con esto, la ecuación de la recta tangente a la curva de nivel será:

$$\langle x - x_o, n \rangle = 0 \Leftrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} x - \pi \\ y - 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\pi} \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

P2. a. Se tiene

$$\begin{aligned}\nabla g(x) &= \nabla \left(\frac{x'Ax}{x'x} \right) \\ &= \frac{x'x \nabla(x'Ax) - x'Ax \nabla(x'x)}{(x'x)^2} \\ &= \frac{x'x(A + A')x - x'Ax 2x}{(x'x)^2} \\ &= 2 \frac{x'x Ax - x'Ax x}{(x'x)^2} \\ \nabla g(x_0) = 0 &\Leftrightarrow \frac{x'_0 x_0 A x_0 - x'_0 A x_0 x_0}{(x'_0 x_0)^2} \\ &\Leftrightarrow x'_0 x_0 A x_0 - x'_0 A x_0 x_0 = 0 \\ &\Leftrightarrow A x_0 = \frac{x'_0 A x_0}{x'_0 x_0} x_0 \\ &\Leftrightarrow A x_0 = g(x_0) x_0\end{aligned}$$

Con lo cual, los puntos críticos de la función g (donde su gradiente se anula) son vectores propios de la matriz A , con valor propio asociado $g(x_0)$. Si la matriz no fuese simétrica, x_0 corresponde a un vector propio de la matriz $A + A'$ y valor propio $2g(x_0)$.

b. Se tiene

$$\begin{aligned}
F(x) &= G(x, x^2, x) \\
F'(x) &= \frac{\partial G}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} \\
&= -\frac{e^{-xt^2}}{t} \Big|_{t=x} + \frac{e^{-xt^2}}{t} \Big|_{t=x^2} 2x + \int_x^{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{-xt^2}}{t} dt \\
&= 2\frac{e^{-x^5}}{x} - \frac{e^{-x^3}}{x} - \int_x^{x^2} e^{-xt^2} t dt \\
&= 2\frac{e^{-x^5}}{x} - \frac{e^{-x^3}}{x} + \int_x^{x^2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{e^{-xt^2}}{2x} dt \\
&= 2\frac{e^{-x^5}}{x} - \frac{e^{-x^3}}{x} + \frac{e^{-xt^2}}{2x} \Big|_{t=x^2} - \frac{e^{-xt^2}}{2x} \Big|_{t=x} \\
&= 2\frac{e^{-x^5}}{x} - \frac{e^{-x^3}}{x} + \frac{e^{-x^5}}{2x} - \frac{e^{-x^3}}{2x} \\
&= \frac{5e^{-x^5} - 3e^{-x^3}}{2x}
\end{aligned}$$

Con lo cual se tiene

$$\begin{aligned}
0 &= F'(x) \\
&= \frac{5e^{-x^5} - 3e^{-x^3}}{2x} \\
&= 5e^{-x^5} - 3e^{-x^3} \\
\ln\left(\frac{5}{3}\right) &= x^5 - x^3.
\end{aligned}$$

Sabemos que $x^5 > x^3 \quad \forall x > 1$ y ambas funciones son monótonas, con lo cual $F'(x) = 0$ tiene sólo una solución ψ tal que $F'(\psi) = 0$. Además $F'(1) > 0$, con lo cual $F'(x) > 0$ para $x \in [1, \psi)$ y $F'(x) < 0$ para $x \in (\psi, \infty)$. Esto es, F crece en el intervalo $[1, \psi)$ y decrece en (ψ, ∞) . Así F resulta acotada ya que $F(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 1$.

P3. a. Por definición:

$$\begin{aligned} rf(x) &= \langle x, \nabla f(x) \rangle, \text{ con } x=tx \\ rf(tx) &= \langle tx, \nabla f(tx) \rangle \\ &= t \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) \end{aligned}$$

b. Calculemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{f(tx)}{t^r} &= \frac{t^r \frac{d}{dt} f(tx) - f(tx) \frac{d}{dt} t^r}{t^{2r}} \\ &= \frac{t^r \nabla f(tx) \cdot x - f(tx) r t^{r-1}}{(t^r)^2} \\ &= \frac{t^{r-1}}{t^{2r}} (t \nabla f(tx) \cdot x - r f(tx)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

c. De acá, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{f(tx)}{t^r} &= 0 \\ \int_1^t \frac{d}{ds} \frac{f(sx)}{s^r} ds &= 0 \\ f(tx) &= t^r f(x) \end{aligned}$$

Por otra parte, si una función es homogénea de grado r , derivando se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(tx) &= \frac{d}{dt} t^r f(x) \\ \nabla f(tx) \cdot x &= r t^{r-1} f(x) \\ t \nabla f(tx) \cdot x &= r t^r f(x) \\ &= r f(tx) \end{aligned}$$

En particular, para $t = 1$, se cumple la ecuación de Euler.

d. Veamos si la función z es homogénea (y si lo es, de qué grado).

$$\begin{aligned} z(tx, ty) &= (tx)^2 (ty) f\left(\frac{tx}{ty}\right) + (tx)(ty)^2 g\left(\frac{ty}{tx}\right) \\ &= t^3 \left(x^2 y f\left(\frac{x}{y}\right) + x y^2 g\left(\frac{y}{x}\right) \right) \\ &= t^3 z(x, y) \end{aligned}$$

Luego, z es una función homogénea de grado 3 y, por lo tanto, cumple la relación de Euler por la parte (c)

$$\begin{aligned}x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} &= \langle x, \nabla z(x, y) \rangle \\ &= 3z(x, y)\end{aligned}$$

e. Análogo a lo anterior,

$$\begin{aligned}f(tx, ty) &= \frac{3(tx)^2 + (tx)(ty) - (ty)^2}{((tx)(ty) + (tx)^2)^{\frac{1}{4}}} \\ &= t^{\frac{3}{2}} f(x, y)\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} &= \langle x, \nabla f(x, y) \rangle \\ &= \frac{3}{2} f(x, y)\end{aligned}$$