MA22A Cálculo en varias variables. Semestre 2007-3
Profesor: Marcelo Leseigneur **Auxiliar:** Julio Deride.

Guía

31 de diciembre de 2007

P1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Estudie la continuidad de f en $\mathbb{R}^2$

(b) Encuentre las derivadas parciales de f y estudie su continuidad en $\mathbb{R}^2$

(c) Estudie ladiferenciabilidad de f en $\mathbb{R}^2$

(d) Muestre que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y$, $\forall y$.

(e) Muestre que $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x$, $\forall x$.

(f) Muestre que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

(g) ¿Es f de clase $\mathcal{C}^2$?

P2. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \arctan \frac{y}{x} - y^2 \arctan \frac{x}{y} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Calcule $f(x,0)$ y $f(0,y)$ para $x \neq 0$ e $y \neq 0$.

(b) Para $(x,y) \neq (0,0)$ determine $\nabla f(x,y)$ y $H_f(x,y)$. Verifique que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

(c) ¿Se puede concluir que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$? Explique y calcúlelas.

P3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en (a,b), $f(a,b) = c$, y $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$. Sea C la curva de nivel de c de la función f. Muestre que

$$y = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)}{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}(x-a) + b$$

es una ecuación para la recta tangente a C en (a,b).

P4. Sean x, y, y z el largo, ancho, y alto, respectivamente, de una caja. Suponga que la caja está aumentando su tamaño de la siguiente forma: cuando $x = 3[cm]$, $y = 2[cm]$, y $z = 5[cm]$, el largo aumenta en a una tasa de 2 [cm] por segundo, en ancho a una tassa de 4 [cm] por segundo, y el alto a una tasa de 3 [cm] por segundo.

(b) Suponga que puede medir con una precisión h, esto es, el alto es alrededir de $3 \pm h[cm]$, el ancho de $2 \pm h[cm]$, y el alto de $4 \pm h[cm]$. Use la aproximación lineal de la parte (a) y encuentre una cota para el error de medición.

(c) Encuentre la tasa de cambio del volumen de la caja en dicho instante.

(d) Encuentre la tasa de cambio de la diagonal de la caja en dicho instante.

P5. Usar la regla de la cadena para obtener las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial s}$ y $\frac{\partial z}{\partial t}$

(a) $z = x^2 + y^2$ para $x = s^2 - t^2$, $y = 2st$

(b) $z = \frac{x}{x+y}$ para $x = s\cos t$, $y = s\sin t$.

(c) $z = e^x \cos y$ para $x = s^2 + 2t^2$, $y = 3\sin t$.

P6. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal dada, consideremos el campo escalar en $\mathbb{R}^2$ definido mediante la ecuación $f(x) =< x, Tx >$. Calcular la derivada de f en la dirección de cualquier vector unitario.

P7. Sea F un campo vectorial derivable dado por $F = (F_1, F_2, F_3)$. Se definen

$$\begin{aligned} \text{rot}F &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) \\ \text{div}F &= \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{aligned}$$

Calcule rot$F$ y div$F$ en los siguientes casos.

(a) $F(x, y, z) = (y^2, xy, xz)$,

(b) $F(x, y, z) = (y - z, yz, -xz)$,

(c) $F(x, y, z) = (x, y, z)$,

(d) $F(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$.

P8. Sean

$$\begin{aligned} f(u, v, w) &= (e^{u-w}, \cos(v + u) + \sin(u + v + w)) \\ g(x, y) &= (e^x; \cos(y - x); e^{-y}) \end{aligned}$$

Calcular $f \circ g$ y $D(f \circ g)(0, 0)$.

P9. Suponer que una montaña tiene forma de un paraboloide elíptico $z = c - ax^2 - by^2$, donde a, b y c son constantes positivas, x e y son las coordenadas este-oeste y norte-sur, y z es la altitud sobre el nivel del mar (x, y y z están medidas en metros). En el punto $(1, 1)$, ¿En qué dirección aumenta más rápido la altitud? Si se suelta una pelota en $(1, 1)$, ¿En qué dirección comenzará a rodar?

P10. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dos campos vectoriales definidos del modo siguiente:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (e^x + 2y, \sin(y + 2x)), \\ g(u, v, w) &= (u + 2v^2 + 3w^3, 2v - u^2). \end{aligned}$$

(a) Calcular cada una de las matrices jacobianas Df y Dg.

(c) Calcular la matriz jacobiana Dh en (1,-1, 1).

P11. Verificar la regla de la cadena para $\frac{\partial h}{\partial x}$ donde $h(x;y) = f(u(x;y);v(x;y))$ y

$$\begin{aligned} f(u,v) &= \frac{u^2+v^2}{u^2-v^2} \\ u(x,y) &= e^{-x-y} \\ v(x,y) &= e^{xy} \end{aligned}$$

P12. Sea $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por:

$$g(x) = \frac{x^t A x}{x^t x}$$

donde A es una matriz simétrica de coeficientes reales de $n \times n$.
Si x^* verifica que $\nabla g(x^*) = 0$, demuestre que $Ax^* = g(x^*)x^*$. Interprete.

P13. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$y $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones de clase $\mathcal{C}^2$. Si $F(x,y) = f(g(x)h(y), g(x)+h(y))$.
Calcular $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$
¿Dónde están evaluadas las derivadas parciales?.