Cálculo en Varias Variables

Profesor de Cátedra: Marcelo Leseigneur
Profesor Auxiliar: Julio Deride

Clase Auxiliar #3

Viernes 14 de diciembre de 2007

Problema 1 Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ cerrados. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función contínua.

i. Demuestre que $A \cap B$ es un conjunto cerrado.

ii. Demuestre que la preimagen por una función contínua de un conjunto cerrado es un conjunto cerrado. Concluya que $\{x \in \mathbb{R}^n | f(x) \geq 0\}$ es cerrado.

iii. Usando las partes anteriores, concluya que $\{x \in \mathbb{R}^n | x \in A, f(x) \geq 0\}$ es cerrado.

Solución:

i. Haremos la demostración vía sucesiones. Sea $\{x_n\} \subseteq A \cap B$, tal que $x_n \to x \in \mathbb{R}^n$. Como $\{x_n\} \subseteq A \cap B$, en particular $\{x_n\} \subseteq A$ y como A es cerrado, $x \in A$. Análogamente, $\{x_n\} \subseteq A \cap B$, en particular $\{x_n\} \subseteq B$ y como B es cerrado, $x \in B$. Con esto, $x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in A \cap B$. Lo que concluye que $A \cap B$ es cerrado.

ii. Sea $C \subseteq \mathbb{R}$. Queremos demostrar que $f^{-1}(C)$ es cerrado. Sea $\{x_n\} \subseteq f^{-1}(C)$, tal que $x_n \to x \in \mathbb{R}^n$. Por definición,
$$x_n \in f^{-1}(C) \Longleftrightarrow \exists y_n \in C, f(x_n) = y_n$$
Luego, como $x_n \to x$ y f es continua, $f(x_n) \to f(x)$
Además, $\{y_n\} \subseteq C$, con C cerrado, se tiene que $f(x) \in C \Rightarrow x \in f^{-1}(C)$.
Finalmente,
$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq 0\} = f^{-1}([0, \infty))$$
con $[0, \infty)$ un subconjunto cerrado. Luego $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq 0\}$ es la preimagen por una función continua de un conjunto cerrado.

iii. Podemos escribir
$$\{x \in \mathbb{R}^n : x \in A \wedge f(x) \geq 0\} = A \cap f^{-1}([0, \infty))$$
con A cerrado por enunciado, $f^{-1}([0, \infty))$ cerrado por la parte (ii) y por lo tanto, la intersección es cerrada por la parte (i).

Problema 2 Sea (X, d) un espacio métrico y $A, B \subseteq X$ tales que $A \subseteq B$. Pruebe que $\mathrm{Int}A \subseteq \mathrm{Int}B$ y que $\mathrm{Adh}A \subseteq \mathrm{Adh}B$.

Problema 3 Dibuje los siguientes conuntos A, luego calcule su interior, adherencia y frontera. Concluya si A es abierto, cerrado, ninguno o ambos. Argumente.

i. $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (n, n+1)$.

ii. $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1, x^2 + y^2 < 1\}$.

iii. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2, \forall r, 0 < r < 1, r \in \mathbb{Q}\}$.

Problema 4 Sea $f(x, y) = (\frac{xy^2}{x^2+y^4}, \sqrt{x^4 - xy^3})$

(a) Determine y grafique el dominio de f.

(b) Determine las funciones componentes de f y sus respectivos dominios. Relacione este resultado con el obtenido en (a).

(c) Encuentre Interior, Adherencia y Frontera del dominio de f. ¿Es el Dominio un conjunto abierto?

(d) Calcule (si es que existe) para $(a, b) \in R^2$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$$

Problema 5 Determine si las siguientes funciones son contínuas en el origen:

i.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x\cos(y)-y\cos(x)-x+y}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ii.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

iii-

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1+x-\cos(x^2+y^2)-\arctan(x)}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Solución

Para esta pregunta, utilizamos los límites conocidos

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \arctan(x)}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

i. Con esto, probemos la continuidad por definición. Sea $\epsilon > 0$.

$$\begin{aligned}
|f(x,y) - f(0,0)| &= \left|\frac{x\cos(y) - y\cos(x) - x + y}{x^2+y^2} - 0\right|. \\
&= \left|\frac{x\cos(y) - y\cos(x) - x + y}{x^2+y^2}\right|. \\
&= \left|\frac{x(\cos(y)-1) + y(1-\cos(x))}{x^2+y^2}\right|. \\
&\leq \left|\frac{x(\cos(y)-1)}{x^2+y^2}\right| + \left|\frac{y(1-\cos(x))}{x^2+y^2}\right|. \\
&\leq \left|\frac{x(\cos(y)-1)}{x^2+y^2}\right| + \left|\frac{y(1-\cos(x))}{x^2+y^2}\right|. \\
&\leq \left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right|\left|\frac{1-\cos(y)}{y^2}\right| + \left|\frac{yx^2}{x^2+y^2}\right|\left|\frac{1-\cos(x)}{x^2}\right|.
\end{aligned}$$

Ahora utilizamos el límite conocido

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0 \left|\frac{1-\cos(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\right| < \epsilon, |x| < \delta.$$

Luego, para $\epsilon_1 > 0, \exists\delta_1 = \delta_1(\epsilon_1), \left|\frac{1-\cos(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\right| < \epsilon_1, |x| < \delta_1$, en particular, si $(x,y) \in B((0,0),\delta_1)$,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1-\cos(y)}{y^2}\right| &< (\frac{1}{2} + \epsilon_1) = L, \forall |y| < \delta_1. \\
\left|\frac{1-\cos(x)}{x^2}\right| &< (\frac{1}{2} + \epsilon_1) = L, \forall |x| < \delta_1.
\end{aligned}$$

Luego, si $(x,y) \in B((0,0),\delta_1)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
|f(x,y) - f(0,0)| &< \left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| L + \left|\frac{yx^2}{x^2+y^2}\right| L. \\
&= \frac{|x||y^2|}{|x^2+y^2|}L + \frac{|y||x^2|}{|x^2+y^2|}L. \\
&< \frac{(x^2+y^2)y^2}{x^2+y^2}L + \frac{(y^2+x^2)x^2}{x^2+y^2}L. \\
&< y^2L + x^2L. \\
&< L\delta_1^2. \\
&< \epsilon.
\end{aligned}$$

De aquí, $\exists\delta_2 = \delta_2(\epsilon)$ tal que la última igualdad es válida. Considerando $\delta < \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$ se obtiene la continuidad en $(0,0)$.

ii. Nuevamente, sea $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned}
|f(x,y)-f(0,0)| &= \left|\frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}\right|. \\
&< \left|\frac{y(2x^4+4x^2y^2+2y^4)}{(x^2+y^2)^2}\right|. \\
&< \left|\frac{2y(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^2}\right|. \\
&< 2\,|y|\,. \\
&< 2 \parallel (x,y) \parallel . \\
&< 2\delta < \epsilon.
\end{aligned}$$

Con lo que se concluye la continuidad.

iii. Este resultado lo haremos por álgebra de límites

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)+x-\arctan(x)}{x^2+y^2}. \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}+\frac{x-\arctan(x)}{x^2+y^2}. \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(1-\cos(x^2+y^2))(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}+\frac{(x-\arctan(x))x^3}{(x^2+y^2)x^3}. \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}(x^2+y^2)+\frac{x-\arctan(x)}{x^3}\frac{x^3}{x^2+y^2}.
\end{aligned}$$

Veamos que ambos límites existen y que cada límite existe, esto es

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}(x^2+y^2) &= 0. \\
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-\arctan(x)}{x^3}\frac{x^3}{x^2+y^2} &= 0,
\end{aligned}$$

ya que es ambos son productos de límites que existen. Con lo cual tenemos la existencia del límite y la función es continua.