Cálculo en Varias Variables

Profesor de Cátedra: Marcelo Leseigneur
Profesor Auxiliar: Julio Deride

Clase Auxiliar #1
Viernes 07 de diciembre de 2007

Problema 1 Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Una norma es una función $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_+$, que cumple con

- i. $\|x\| \geq 0$ y $\|x\| = 0 \iff x = 0$.
- ii. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- iii. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Pruebe que toda norma define una métrica.

Problema 2 Sea M un espacio métrico dotado de la métrica d . Muestre que

$$d_1(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

es una métrica

Problema 3 a. Demuestre la desigualdad de Young: si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

b. Demuestre la desigualdad de Hölder: si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces

$$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q \right)^{1/q}$$

c. Demuestre la desigualdad de Minkowski

$$\left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p \right)^{1/p}$$

d. Sea

$$\ell^p = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p < \infty \right\}$$

Muestre que $\forall x, y \in \ell^\infty$

$$\rho_p(x, y) = \sqrt[p]{\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|^p}$$

es una métrica.

Problema 4 Sea

$$\ell^\infty = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty \right\}$$

Muestre que $\forall x, y \in \ell^\infty$

$$\rho_\infty(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|$$

es una métrica.

Problema 5 Sea $\|\cdot\|$ una norma en $\mathbb{R}^n$ y sea $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$d(x, y) = \begin{cases} \|x\| + \|y\| & \text{si } \|x\| \neq \|y\| \\ \|x - y\| & \|x\| = \|y\| \end{cases}$$

- i. Demuestre que d es una métrica en $\mathbb{R}^n$.
- ii. Determine si d es inducida por una norma en $\mathbb{R}^n$.
- iii. Considere en caso $n = 2$ y $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1$. Determine analítica y gráficamente $\mathcal{B}(a, r)$, $\overline{\mathcal{B}}(a, r)$, con $a \in \mathbb{R}^2$, $r \in \mathbb{R}$. (analice los casos $a = (0, 0)$ y $a = (1, 1)$ con $r = 1$ y $r = 3$).