1 Movimiento con loops

Un trompo con momentos de inercia dados A, C y dados m y h se coloca en movimiento con su eje inclinado en ángulo θ_1, con $\dot{\theta}_1 = 0$, con un cierto spin s y precesión inicial $\dot{\phi}(0) = \Omega$. La condición para que debe cumplirse para que en el movimiento siguiente el trompo haga loops puede establecerse de la siguiente forma. Supongamos que las raíces están ordenadas de modo que $u_1 > u_2$. Las constantes serán

$$\begin{aligned} 2E - Cs^2 &= A\dot{\phi}^2 \sin^2\theta + A\dot{\theta}^2 + 2mgh\cos\theta = A\Omega^2\sin^2\theta_1 + 2mgh\cos\theta_1, \\ \alpha &= A\dot{\phi}\sin^2\theta + Cs\cos\theta = A\Omega\sin^2\theta_1 + Cs\cos\theta_1 = A\dot{\phi}_3 + Csu_3, \end{aligned}$$

donde u_3 corresponde al valor intermedio $u_1 > u_3 > u_2$ donde $\dot{\phi}_3 = 0$. En resumen queremos que

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(u_3) &= \frac{A\Omega\sin^2\theta_1 + Cs\cos\theta_1 - Csu_3}{A(1-u_3^2)} = 0, \\ f(u_3) &> 0. \end{aligned}$$

La segunda condición corresponde a que u_3 esté entremedio. Entonces

$$\begin{aligned} f(u_3) &= \left(2E - Cs^2 - 2mghu_3\right)\frac{1-u_3^2}{A} - \left(\frac{\alpha - Csu_3}{A}\right)^2 > 0, \\ 0 &< \left(2E - Cs^2 - 2mghu_3\right)\frac{1-u_3^2}{A}, \\ 0 &< A\Omega^2\sin^2\theta_1 + 2mgh\cos\theta_1 - 2mghu_3, \end{aligned}$$

pero

$$\cos\theta_1 - u_3 = -\frac{A\Omega\sin^2\theta_1}{Cs}$$

entonces la condición es

$$\begin{aligned} 0 &< A\Omega^2\sin^2\theta_1 + 2mgh(-\frac{A\Omega\sin^2\theta_1}{Cs}), \\ 0 &< \Omega - (\frac{2mgh}{Cs}), \\ s &> \frac{2mgh}{\Omega C}. \end{aligned}$$

Veamos un cálculo numérico. Sean $A = \frac{5}{4}mh^2$, $C = \frac{1}{2}mh^2$, $\Omega = \sqrt{\frac{g}{h}}$, $s > \frac{2mgh}{\frac{1}{2}mh^2\sqrt{\frac{g}{h}}} = 4\frac{g}{\sqrt{gh}}$, $s = 8\frac{g}{\sqrt{gh}}$, $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$, $\dot{\theta}_1 = 0$.

calculando resultan

$$\begin{aligned} 2E - Cs^2 &= (\frac{5}{16} + \sqrt{3})mgh \\ \alpha &= \frac{1}{16}mh^{\frac{3}{2}}\sqrt{g}\left(5 + 32\sqrt{3}\right) \end{aligned}$$

luego $f(u)$ resulta

$$f(u) = \frac{1}{400} g \left(320u^2 - 2098u + 999\sqrt{3} \right) \frac{2u - \sqrt{3}}{h},$$

con raíces

$$\begin{aligned} u_1 &= 0.967\,53, \\ u_2 &= \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0.866\,03. \end{aligned}$$

La velocidad angular de precesión será

$$\dot{\phi} = \frac{1}{20}\sqrt{\frac{g}{h}} \frac{5 + 32\sqrt{3} - 64u}{1 - u^2},$$

y evaluando

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(0.967\,53) &= -1.\,171\,1, \\ \dot{\phi}(0.866\,03) &= 0.999\,97. \end{aligned}$$