

TRANSFERENCIA DE CALOR

MI31A-Fenómenos de Transporte en
Metalurgia Extractiva

Prof. Tanai Marín

Clase #6

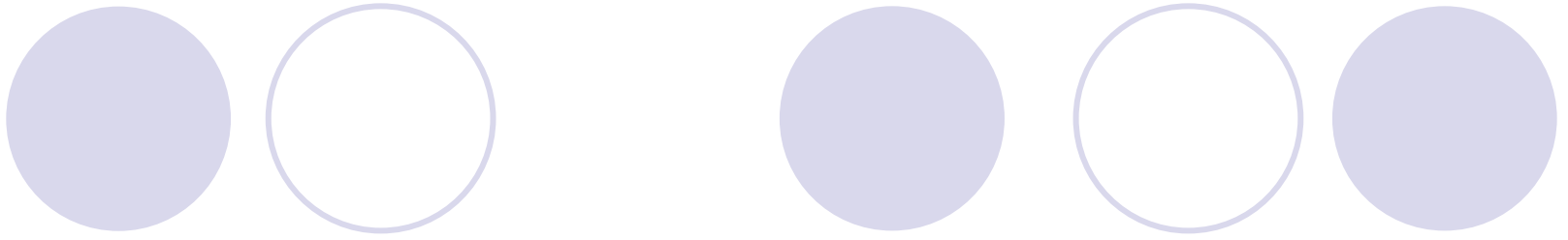
Transferencia de calor no estacionaria

- El balance de calor para un sistema transiente en 1D y sin fuentes volumetricas es:

Acumulación = Flujo Neto de Calor

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = -\frac{dq}{dx}$$

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right)$$



- En 3D y en notación vectorial:

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = (\nabla \cdot k \nabla T)$$

- Si la conductividad es independiente de la T y posición, se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{dT}{dt} = \alpha \nabla^2 T$$
$$\frac{dT}{dt} = \alpha \left(\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{d^2 T}{dy^2} + \frac{d^2 T}{dz^2} \right)$$



- Siendo α , la *difusividad térmica*:
 - Es la habilidad de un material de conducir (k) energía térmica en relación a su capacidad de almacenar energía térmica (ρc_p).
 - Materiales con una gran difusividad térmica, responden rápidamente a cambios térmicos, mientras que materiales con baja α , responden más lentamente.



- En casos en que el sistema incluye una fuente de calor (eléctrica, microondas, decaimiento radiactivo, hidratación del cemento, reacciones químicas, calcinación, etc), Q_{gen} (W/m³), y si ésta es liberada, entonces se tiene:

$$\frac{dT}{dt} = \alpha \left(\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{d^2T}{dy^2} + \frac{d^2T}{dz^2} \right) + \frac{Q_{gen}}{\rho c_p}$$

Ejemplo

- Para un bloque con conductividad k y ancho L , con temperaturas fijas T_0 y T_L en los extremos, encuentre el flujo de calor en estado estacionario:

Solución:

$$\frac{dT}{dt} = \alpha \frac{d^2T}{dx^2}$$

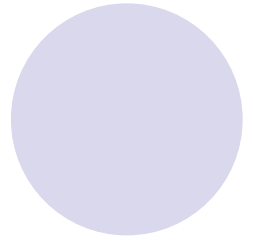
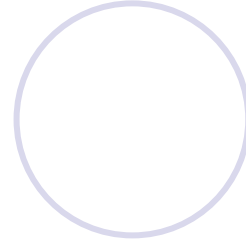
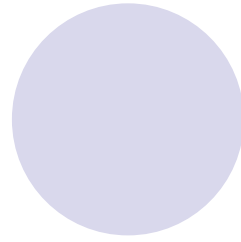
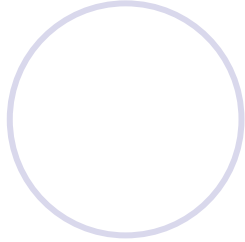
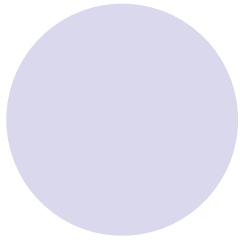
En estado estacionario:

$$\frac{dT}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d^2T}{dx^2} = 0 \Rightarrow \frac{dT}{dx} = C_1$$

$$T = C_1x + C_2$$

Aplicando C.B.:

$$T = \frac{T_L - T_0}{L}x + T_0$$



- Usando la ley de conducción de Fourier:

$$q = -k \frac{dT}{dx}$$

$$q = -k \frac{d}{dx} \left(\frac{T_L - T_0}{L} x + T_0 \right) = -k \frac{T_L - T_0}{L}$$

Coordenadas cilíndricas:

- En coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) la ecuación de conducción de calor queda:

$$\frac{dT}{dt} = \alpha \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 T}{d\phi^2} + \frac{d^2 T}{dz^2} \right) + \frac{Q_{gen}}{\rho c_p}$$

- Si la temperatura sólo varía en la dirección radial:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\alpha}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{Q_{gen}}{\rho c_p}$$

Coordenadas esféricas:

- En coordenadas esféricas (r, ϕ, ω) la ecuación de conducción de calor, cuando la temperatura sólo varía en la dirección radial, queda:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\alpha}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) + \frac{Q_{gen}}{\rho c_p}$$

Solución a problemas de conducción transiente

- Para problemas de conducción de calor en sólidos, con una componente transiente y 1 o más coordenadas, la solución puede ser encontrada para condiciones de borde e iniciales dadas.
- Matemáticamente se pueden utilizar métodos de combinación de variables, separación de variables, respuesta sinusoidal o transformada de Laplace.

Casos especiales



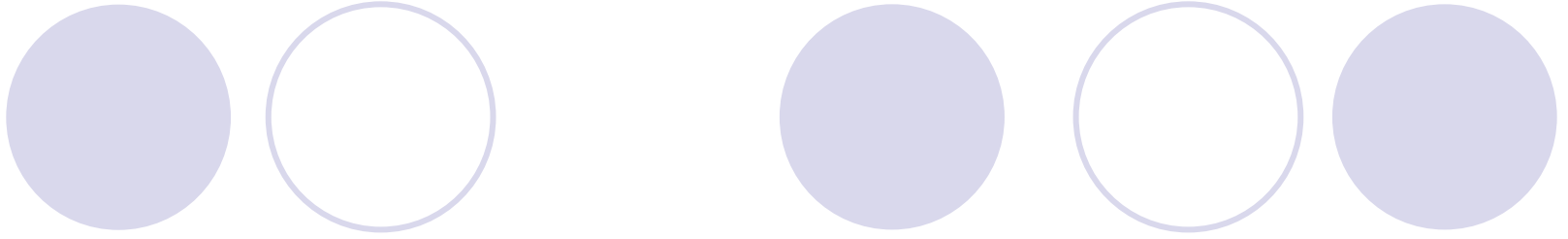
- Para no centrarse en los métodos matemáticos para la resolución de problemas de este tipo y para no perder de vista la aplicación práctica de la transferencia de calor no estacionaria en sólidos, se describirán dos métodos que hacen uso de simplificaciones apropiadas:
- Método de “Lump capacitance”
- Modelo de sólido semi-infinito

Método de Lump Capacitance

- En muchos sistemas, la tasa de transporte de energía hacia o desde un sistema es mucho más lenta que la velocidad a la que se distribuye dentro del sistema.
- En ese caso, es razonable asumir que la energía se distribuye uniformemente a través del sistema en cada momento por lo que no hay un gradiente dentro de éste.

Método de Lump Capacitance

- Por lo tanto, el sistema puede tratarse como una sola entidad (lump).
- Ejemplo: Un bloque de cobre enfriado en aire.
 - Debido a la alta conductividad térmica del cobre y la “lenta” remoción de calor a través del aire, el bloque de Cu tiene una temperatura uniforme durante todo el proceso de enfriamiento.



- Este método, tiene una amplia variedad de aplicaciones y puede ser usado en el análisis de transferencia de calor, de masa, reactores químicos y sistemas eléctricos. En estos últimos, esta técnica se aplica a la carga o descarga de condensadores a través de alambres delgados.

Lump Capacitance: Transferencia convectiva

- Para transferencia de calor convectiva, tenemos la siguiente ecuación:

$$\rho V c_p \frac{dT(t)}{dt} = hA(T_\infty - T_s(t))$$

- h es el coeficiente de transferencia de calor, A es la superficie del sistema, V es su volumen, ρ la densidad, c_p la capacidad calorífica, T_{inf} es la temperatura ambiente.

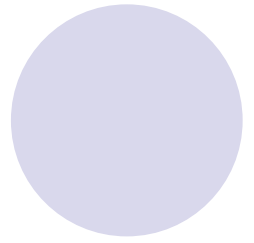
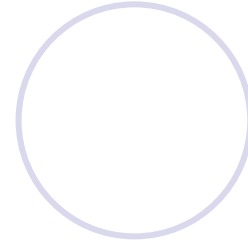
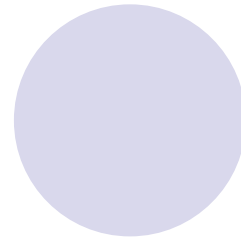
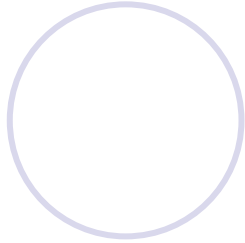
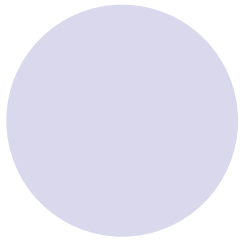


- cuando el método es aplicable, la temperatura en la superficie (T_s) iguala a la temperatura en el seno del sistema (T) en todo momento:

$$T_s(t) = T(t)$$

- bajo esta suposición y con una temperatura inicial T_0 del sistema, obtenemos:

$$\int_{T_0}^T \frac{dT(t)}{(T(t) - T_\infty)} = - \int_0^t \frac{hA}{\rho V c_p} dt$$



- Como resultado:

$$\frac{T(t) - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} = e^{-\frac{hA}{\rho V c_p} t} = e^{-\frac{t}{\tau}} = e^{-Bi \cdot Fo}$$

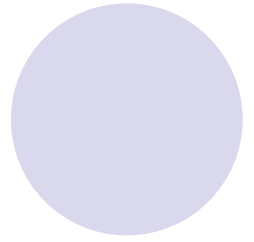
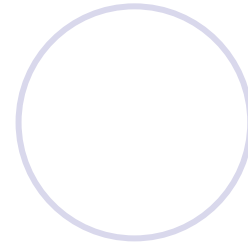
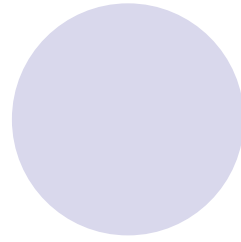
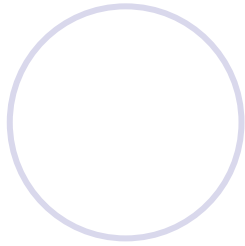
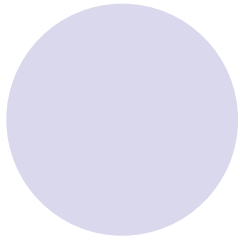
- donde la constante de tiempo τ es:

$$\tau = \frac{\rho V c_p}{hA} = \frac{\rho L_c c_p}{h}$$

- L_c es el largo característico (V/A) y se usa en la definición de los números adimensionales de *Fourier* y *Biot*:

$$Fo = \frac{kt}{\rho c_p L_c^2} = \frac{\alpha t}{L_c^2}$$

$$Bi = \frac{hL_c}{k}$$

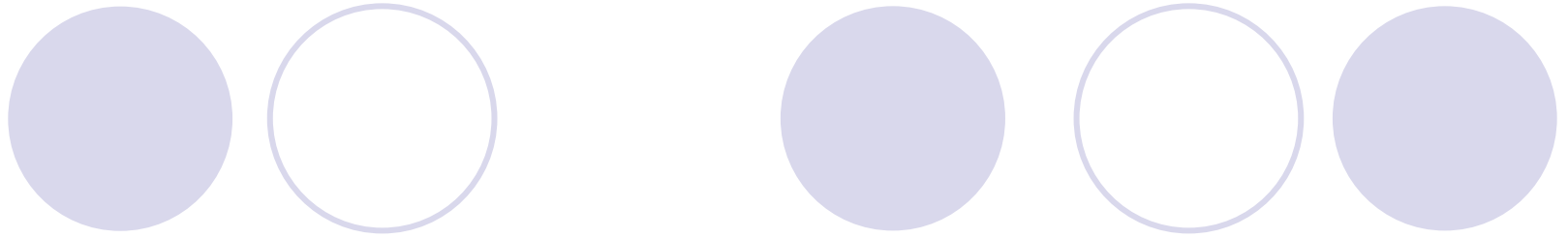


Sistema	V/A	Lc	BixFo
Placa afectada por ambos lados Ancho: W	$\frac{WL_1L_2}{2L_1L_2}$	$\frac{W}{2}$	$\frac{2ht}{W\rho c_p}$
Cilindro Radio = R	$\frac{\pi R^2 L}{2\pi RL}$	$\frac{R}{2}$	$\frac{2ht}{R\rho c_p}$
Esferea Radio = R	$\frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi R^2}$	$\frac{R}{3}$	$\frac{3ht}{R\rho c_p}$



- Para determinar si el método de “lump capacitance” es aplicable o no, tenemos que ver la razón entre resistencias internas y externa.
- la transferencia de calor hacia la superficie está dada por $(T_{inf}-T_s)$ y dentro del sólido, se puede aproximar por $k(T_s-T_{centro})/L$
- dado que durante la transferencia, la energía transferida desde el ambiente a la superficie iguala a la energía conducida desde la superficie, obtenemos:

$$\frac{T_s - T_{centro}}{T_{\infty} - T_s} \approx \frac{\frac{k}{L}}{\frac{1}{h}} = \frac{hL}{k} = Bi$$



- Si esta razón es mucho menor a 1, la resistencia a conducir calor dentro del sólido es mucho menor a la resistencia convectiv. Para Bi menores a 0.1, el error introducido por esta técnica es menor al 5%, lo que es aceptable

$$Bi \leq 0.1$$