

ME55A  
Fundamentos de Control de Sistemas

R. H. Hernández-Pellicer  
Dept. Ing. Mecánica-U. de Chile



---

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>7</b>
1.1. Reseña histórica . . . . .	8
1.2. Algunas definiciones . . . . .	10
1.3. Diagramas de bloque . . . . .	14
<b>2. Métodos y Técnicas de Tratamiento de Señales</b>	<b>17</b>
2.1. Distribuciones . . . . .	17
2.1.1. Definición . . . . .	18
2.1.2. Función $\delta$ de Dirac . . . . .	19
2.1.3. Propiedades de la Función de Dirac . . . . .	20
2.1.4. Peine de Dirac . . . . .	22
2.2. Sistemas Lineales e Invariantes en el Tiempo . . . . .	25
2.2.1. Definición . . . . .	25
2.2.2. Respuesta Impulsional . . . . .	26
2.2.3. Funciones propias . . . . .	26
2.3. Función de Transferencia . . . . .	27
2.3.1. Definición . . . . .	27
2.3.2. Medición de la Función de Transferencia . . . . .	27
2.4. Sistemas Muestreados (Discretos) . . . . .	32
2.4.1. Muestreo de señales . . . . .	33
2.4.2. Definición de sistemas muestreados . . . . .	33
2.4.3. Respuesta Impulsional . . . . .	33
2.4.4. Ecuación de Diferencias . . . . .	34
2.5. Transformación de Señales . . . . .	36
2.5.1. Transformada de Fourier . . . . .	36
2.5.2. Transformada de Laplace . . . . .	50
2.6. Transformación de Señales a Tiempo Discreto . . . . .	57

---

2.6.1.	La Transformada en $Z$ ( $TZ$ ) . . . . .	57
2.6.2.	Transformada en frecuencias Reducidas, ( $TR$ ) . . . . .	58
2.6.3.	Algunos ejemplos . . . . .	60
2.6.4.	Problemas Propuestos . . . . .	62
<b>3.</b>	<b>Modelos Dinámicos y Respuesta Dinámica</b>	<b>67</b>
3.1.	Sistemas Dinámicos . . . . .	67
3.1.1.	Mecánicos . . . . .	67
3.1.2.	Eléctricos . . . . .	71
3.1.3.	Electromecánicos . . . . .	73
3.1.4.	Fluidos . . . . .	77
3.2.	Linealización . . . . .	77
3.2.1.	Formulas generales . . . . .	79
3.2.2.	Expansión en Serie de Taylor . . . . .	79
3.3.	Respuesta Dinámica . . . . .	81
3.3.1.	Regla de Mason . . . . .	81
3.3.2.	Respuesta Transiente . . . . .	83
3.3.3.	Respuesta en Sistemas de Segundo Orden . . . . .	86
3.3.4.	Sistemas de Segundo Orden . . . . .	89
3.3.5.	Especificación en el Dominio Temporal . . . . .	91
3.3.6.	Efecto de Ceros y Polos Adicionales . . . . .	95
3.3.7.	Expansión en Fracciones Parciales . . . . .	97
<b>4.</b>	<b>Principios Básicos de Retro-Alimentación</b>	<b>99</b>
4.1.	Caso de Estudio: Motor DC . . . . .	100
4.2.	Propiedades Generales de la Retro-Alimentación . . . . .	106
4.3.	Tipos de Retro-Alimentación . . . . .	108
4.3.1.	RA Proporcional (P) . . . . .	108
4.3.2.	RA Integral (I) . . . . .	110
4.3.3.	RA Derivativa (D) . . . . .	110
4.3.4.	Retro-alimentación PID . . . . .	111
4.3.5.	Ajuste de un controlador PID . . . . .	113
4.4.	Estabilidad . . . . .	116
4.4.1.	Estabilidad BIBO . . . . .	116
4.4.2.	Criterio de estabilidad de Routh . . . . .	117

<b>5. Métodos de Diseño</b>	<b>121</b>
5.1. Lugar geométrico de Las Raíces (LGR) . . . . .	121
5.1.1. Midamos la fase de $G(s)$ . . . . .	125
5.1.2. Selección de Ganancia con LGR . . . . .	133
5.1.3. Compensación dinámica . . . . .	135
5.2. Respuesta en Frecuencia . . . . .	141
5.2.1. Régimen estacionario . . . . .	143
5.2.2. Gráficos de Bode . . . . .	144
5.2.3. Especificaciones de diseño . . . . .	150
5.2.4. Estabilidad: Margen de Ganancia y Fase . . . . .	151
5.3. Estabilidad . . . . .	154
5.3.1. Criterio de Nyquist . . . . .	154
5.3.2. Análisis de Estabilidad . . . . .	162
<b>6. Instrumentación</b>	<b>167</b>
6.1. Introducción . . . . .	167
6.2. Sensores . . . . .	170
6.2.1. Temperatura . . . . .	172
6.2.2. Velocidad . . . . .	176
6.2.3. Caudal . . . . .	178
6.2.4. Luminosidad . . . . .	180
6.3. Actuadores . . . . .	183
6.3.1. Servos . . . . .	185
6.3.2. Motor paso a paso . . . . .	188
<b>7. Bibliografía</b>	<b>193</b>



## Capítulo 4

# Principios Básicos de Retro-Alimentación

En un sistema de control se debe monitorear la variable de salida y luego compararla con algún valor deseado (o set-point). Es el error (diferencia) resultante es usado continuamente para corregir la salida del sistema.

A esta operación la hemos llamado *lazo de control cerrado* o simplemente *retro-alimentación*.

El objetivo principal en un sistema de control no es sólo *controlar* la salida sino que *controlar con precisión* bajo cualquier condición. Es por ello que el control con retro-alimentación se ha hecho tan popular frente al control de lazo abierto, es decir, sin retro-alimentación. Este último no es capaz de controlar de manera tan precisa cuando el sistema es sometido a condiciones externas variables, o si existen fluctuaciones de los parámetros internos del sistema.

En este capítulo analizaremos en detalle las bases del control con retro-alimentación y lo compararemos con ejemplos de control de lazo abierto.

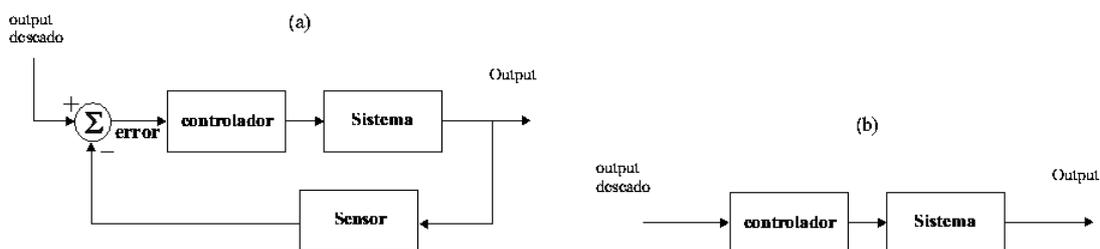


Figura 4.1: (a) Sistema de control con lazo cerrado (Feedback). (b) Sistema de control con lazo abierto

### 4.1. Caso de Estudio: Motor DC

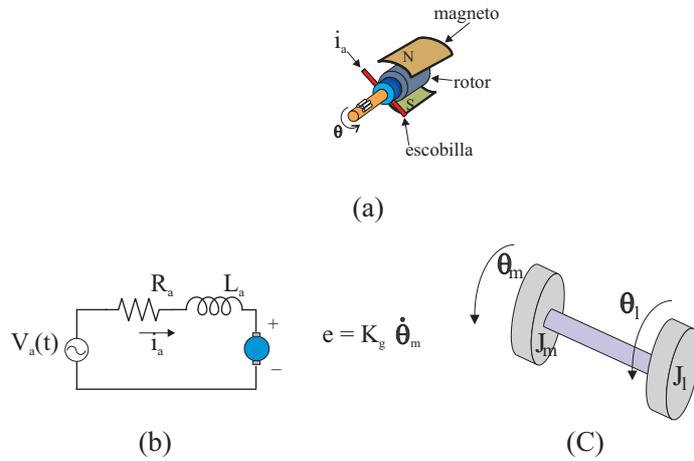


Figura 4.2: a) Esquema Motor DC. b) Circuito eléctrico. c) Diagrama mecánico

El motor DC de la figura 4.2 a) está gobernado por las leyes de la electrodinámica. Podemos calcular el torque en el rotor en términos de la corriente circulando en la armadura a través de una constante  $K_m$  (campo magnético generado por la circulación de una corriente en la armadura)

$$T = K_m i_a \quad \text{ecuación lineal}$$

Y con ello podemos expresar el voltage generado como resultado de la rotación (fem del generador) en términos de la velocidad de rotación  $\dot{\theta}$  y una constante del generador  $K_g$  (fuerza electromotriz generada por desplazamiento del conductor donde fluye una corriente, fuerza de Lorentz)

$$e = K_g \dot{\theta}$$

Si usamos unidades coherentes,  $K_g = K_s$ . Si usamos estas relaciones podemos establecer las ecuaciones eléctricas (4.1) y mecánicas (4.2, 4.3) para el motor DC de acuerdo a los diagramas de la figura 4.2 b,c).

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a = v_a - K_g \dot{\theta} \quad (4.1)$$

$$J_m \ddot{\theta}_m + b(\dot{\theta}_m - \dot{\theta}_l) + K(\theta_m - \theta_l) = K_m i_a \quad (4.2)$$

$$J_l \ddot{\theta}_l + b(\dot{\theta}_l - \dot{\theta}_m) + K(\theta_m - \theta_l) = 0 \quad (4.3)$$

En el análisis mecánico, el rotor del motor (inercia  $J_m$ , ángulo  $\theta_m$ ) está conectado a la carga (inercia  $J_l$ , ángulo  $\theta_l$ ) a través del eje del motor que suponemos capaz de torcerse y lo modelamos como un resorte de constante  $K$  con una constante de amortiguamiento  $b$ .

Supongamos que podemos despreciar en estas ecuaciones los términos de inductancia  $Ld/dt = 0$  y que el eje es rígido  $\theta_m = \theta_l$ , y así simplificarlas,

$$J\dot{\Omega} + \frac{K_m K_g}{R_a} \Omega = \frac{K_m}{R_a} v_a + T_l$$

Podemos redefinir las constantes según,

$$\begin{aligned} \tau &= JR_a/K_m K_g \\ K_0 &= 1/K_g \\ K_1 &= R_a/K_m \\ \Omega &= \dot{\theta}_m \end{aligned}$$

y la ecuación nos queda,

$$\tau\dot{\Omega} + \Omega = K_0(v_a + K_1 T_l) \quad (4.4)$$

Esta ecuación está expresada en el diagrama de bloque de la figura 4.3. El sensor es generalmente un tacómetro que mide la velocidad angular y genera un voltage de salida proporcional (lineal) a ésta. El controlador es un amplificador que entrega un voltage al motor que dependerá de los valores  $\Omega_d$  y  $\Omega$ , deseado y actual respectivamente.

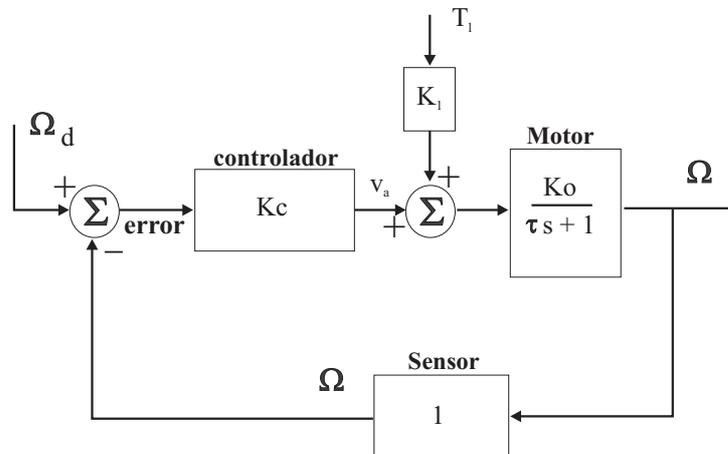


Figura 4.3: Diagrama de bloque del Motor DC con controlador

Comparemos el sistema con lazo de control abierto y con lazo de control cerrado.

### lazo abierto

En el caso del lazo de control abierto, el voltage  $v_a$  es proporcional a la velocidad angular.

$$v_a = K_c \Omega_d \quad (4.5)$$

Además en régimen estacionario,  $\dot{\Omega} = 0$  y sin torques  $T_l = 0$ , tenemos,

$$\Omega = K_0 v_a = \Omega_d$$

Con lo cual  $K_c$  debe ser obligatoriamente  $K_c = K_0^{-1}$ . Entonces se calcula o estima  $K_c$  y luego se impone  $K_c = K_0^{-1}$ .

### lazo cerrado

En el caso del controlador en lazo cerrado,

$$v_a = K(\Omega_d - \Omega) \quad (4.6)$$

Donde  $K$  es la ganancia del controlador. Si combinamos esta ecuación con la ecuación 4.4, tenemos que,

$$\tau \dot{\Omega} + (1 + K K_0) \Omega = K_0 (K \Omega_d + K_1 T_l) \quad (4.7)$$

Si el torque es zero  $T_l = 0$ , en régimen estacionario tenemos la velocidad angular,

$$\Omega = \frac{K K_0}{1 + K_0 K} \Omega_d \quad (4.8)$$

Si elegimos la ganancia de feedback  $K K_0 \gg 1$  entonces

$$\Omega \cong \Omega_d$$

Hasta aquí podemos ver que ambas técnicas nos entregan el resultado deseado. Por un lado el lazo abierto nos dá exactamente  $\Omega = \Omega_d$ , sin embargo el lazo cerrado nos dá asintóticamente  $\Omega = \Omega_d$ .

Donde está la diferencia ? → Cálculo de errores

Supongamos que la ganancia del motor  $K_0$  fluctúa de acuerdo a  $K_0 + \delta K_0$  (o simplemente no se conoce exactamente su valor).

En este caso, para el **lazo abierto**, debemos medir constantemente para ajustar  $K_c$  de manera que no exista error entre el valor deseado y la salida. En ecuaciones esto significa considerar,

$$\begin{aligned} \Omega &= K_0 v_a & v_a &= K_0^{-1} \Omega_d \\ \Omega &= (K_0 + \delta K_0) \frac{1}{K_0} \Omega_d = \left( 1 + \frac{\delta K_0}{K_0} \right) \Omega_d \end{aligned}$$

El error en la velocidad angular será

$$\begin{aligned}\delta\Omega &= \frac{\delta K_0}{K_0}\Omega_d \\ \frac{\delta\Omega}{\Omega_d} &= 1\frac{\delta K_0}{K_0}\end{aligned}$$

Esto es, 10 % de error en  $K_0$  conduce a un 10 % de error en  $\Omega$ .

Ahora consideremos el controlador con **lazo cerrado**. Aplicando el mismo cambio en  $K_0$ , es decir  $K_0 \rightarrow K_0 + \delta K_0$  lo reemplazamos en la ecuación 4.8 y obtenemos

$$\Omega = \frac{(K_0 + \delta K_0)K}{1 + (K_0 + \delta K_0)K}\Omega_d$$

En términos de  $\delta K_0$ ,

$$\Omega = \frac{[K_0K/(1 + K_0K)] + [K\delta K_0/(1 + KK_0)]}{1 + [K\delta K_0/(1 + KK_0)]}\Omega_d$$

Expandimos en Taylor en torno a 1:

$$\Omega \approx \left( \frac{K_0K}{1 + K_0K} + \frac{K\delta K_0}{1 + KK_0} \right) \left( 1 - \frac{K\delta K_0}{1 + KK_0} \right) \Omega_d$$

Si ignoramos los términos de orden  $O(2)$ , y definimos,  $\Omega'$ , la velocidad no perturbada (componente DC),

$$\Omega' = \frac{K_0K}{1 + K_0K}\Omega_d$$

$$\Omega \cong \Omega' + \Omega' \frac{1}{1 + KK_0} \frac{\delta K_0}{K_0}$$

Así

$$\begin{aligned}\delta\Omega' &= \Omega' \frac{1}{1 + KK_0} \frac{\delta K_0}{K_0} \\ \frac{\delta\Omega'}{\Omega'} &= \frac{1}{1 + KK_0} \frac{\delta K_0}{K_0}\end{aligned}\tag{4.9}$$

Vemos que un 10 % de cambio en  $K_0$  causará sólo un  $1/(1 + KK_0) \times 10\%$  de cambio en la velocidad  $\Omega' \cong \Omega_d$ , el cual será muy pequeño si  $KK_0 \gg 1$ .

Esto que hemos hecho se puede resumir usando el cálculo diferencial.

Suponga que tiene una ganancia

$$T(K_0) = \frac{KK_0}{1 + KK_0}$$

Si hacemos una variación de primer orden

$$\begin{aligned} dT &= \frac{dT}{dK_0} \delta K_0 \\ \frac{\delta T}{T} &= \left( \frac{K_0}{T} \frac{dT}{dK_0} \right) \frac{\delta K_0}{K_0} \\ \frac{\delta T}{T} &= (\text{sensibilidad}) \frac{\delta K}{K_0} \end{aligned} \quad (4.10)$$

En el caso anterior la sensibilidad es simplemente  $1/(1 + KK_0)$ . Este es la ventaja mas relevante del control con lazo cerrado: El error es menos sensible a variaciones en los parámetros del sistema que en el caso del lazo abierto. Por lo tanto no es necesario conocer con mucha precisión las características del sistema para obtener un control preciso.

Consideremos ahora el efecto del torque de la carga,  $T_l$ . En el caso **lazo abierto**, las ecuaciones 4.4, 4.5 conducen a:

$$\Omega = K_0(K_c \Omega_d + K_1 T_l)$$

Con  $K_c = K_0^{-1}$ . Entonces,

$$\Omega = \Omega_d + K_0 K_1 T_l$$

y las variaciones de velocidad causadas por la carga son,

$$\delta \Omega = K_0 K_1 T_l$$

Así vemos que el error en la velocidad es proporcional a la perturbación de carga, e involucra los parámetros de diseño ( $K_1, K_0$ ).

Por el contrario, en el caso del lazo cerrado, en régimen estacionario, a velocidad angular constante  $\Omega_d$  y torque  $T_l$ , la ecuación 4.7 es,

$$\Omega = \frac{K_0 K}{1 + K_0 K} \Omega_d + \frac{K_0 K_1}{1 + K_0 K} T_l \quad (4.11)$$

Es posible entonces elegir  $K$  de manera que  $K_0 K \gg 1$  y  $K_0 K \gg K_0 K_1$ , con lo cual el error será despreciable con o sin torque de carga.

Si comparamos los errores de ambos lazos debidos al torque,

$$\begin{aligned} \delta \Omega &= K_0 K_1 T_l && \text{lazo abierto} \\ \delta \Omega &= \frac{K_0 K_1}{1 + K_0 K} T_l && \text{lazo cerrado} \end{aligned}$$

Vemos que el error de velocidad del controlador con lazo cerrado es menor que el error del controlador de lazo abierto en una cantidad que es exactamente la ganancia de lazo del diagrama de bloque  $1 + KK_0$ .

Otra característica simpática del controlador con lazo cerrado es que la estabilidad del sistema puede ser mejorada. Si miramos la ecuación 4.7, vemos que los polos del sistema son

$$s = -\frac{1}{\tau}(1 + KK_0)$$

Con lo cual la constante de tiempo puede disminuir (gracias al factor  $1 + KK_0$ ) si incrementamos la ganancia  $K$ . La respuesta será siempre más rápida si aumentamos la ganancia del sistema, sin embargo en sistemas de segundo orden esto puede traer problemas de inestabilidad y de amortiguamiento (settling time  $t_s$  muy lento).

## 4.2. Propiedades Generales de la Retro-Alimentación

Estas ideas sobre el control de velocidad del motor son aplicables a cualquier sistema de control.

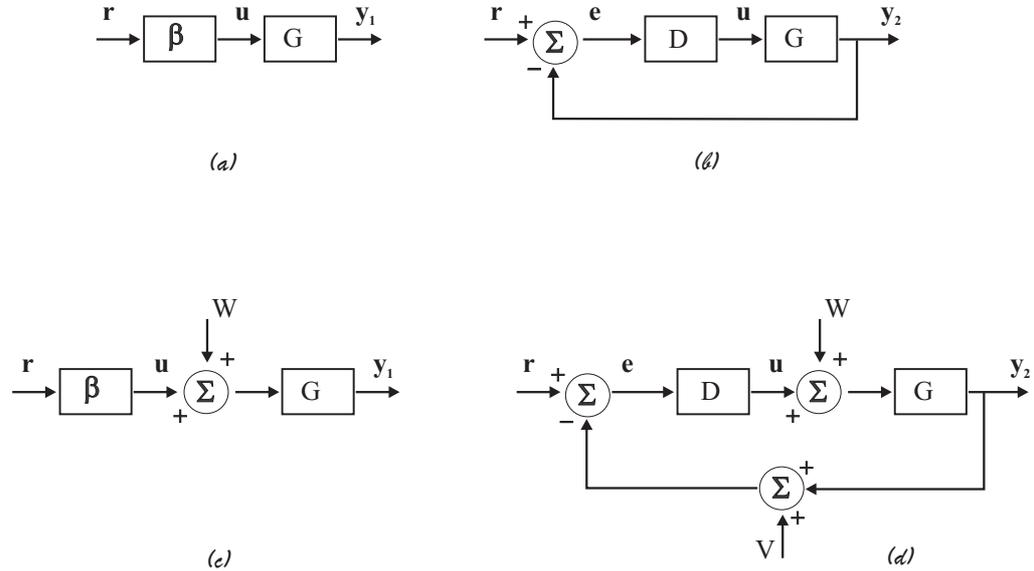


Figura 4.4: Sistemas de control abierto (a,c) y cerrado (b,d). Se agrega una perturbación  $W$  y un ruido o error en el sensor  $V$  en el caso de lazo cerrado

Consideremos el sistema de la figura 4.4 a,b). Las salidas de ambos sistemas son:

$$Y_1(s) = G(s)\beta(s)R(s) \quad (4.12)$$

$$Y_2(s) = \frac{D(s)G(s)}{1 + D(s)G(s)}R(s) \quad (4.13)$$

Cualquier cambio en  $\beta$  o  $G$  en el caso lazo abierto va a causar errores proporcionales en  $y_1$ . En el caso lazo cerrado, cambios en  $D$  o  $G$  van a ser *atenuados* si  $|DG| > 1$ .

De hecho, si  $|DG| \gg 1$ ,  $y_2$  será independiente de  $D, G$ , disminuyendo absolutamente la sensibilidad. Agreguemos perturbaciones  $W$  y posibles errores en el sensor  $V$ . La topología será ahora la de la figura 4.4 c,d).

La respuesta para el lazo abierto y cerrado serán (sin considerar  $V$ ):

$$Y_1(s) = G(s)\beta(s)R(s) + \underbrace{G(s)W(s)}_{\text{Respuesta}} \quad (4.14)$$

$$Y_2(s) = \frac{G(s)D(s)}{1 + G(s)D(s)}R(s) + \underbrace{\frac{G(s)}{1 + D(s)G(s)}W(s)}_{\text{Respuesta}} \quad (4.15)$$

El ingeniero no tiene posibilidad de influenciar el efecto de las perturbaciones en el lazo abierto. Pero en el caso lazo cerrado, bastará hacer  $|D|$  muy grande para que la respuesta  $y_2$  a las perturbaciones  $W$  sea reducida considerablemente.

El efecto del error  $V$  en el lazo cerrado es ( sin considerar  $W$ )

$$Y_2(s) = \frac{D(s)G(s)}{1 + D(s)G(s)}[R(s) - V(s)]$$

Vemos que el error aparece con la misma función de transferencia que posee la entrada  $R$ . Esto indica que es *imposible* atenuar el efecto del ruido sin intervenir el control del sistema.

En general se usaran sensores cuyo ruido esté ubicado en una banda de frecuencias mucho mas grande que las raíces del sistema, para poder filtrarlo sin afectar la dinámica del controlador.

### 4.3. Tipos de Retro-Alimentación

Existen 3 tipos de retro-alimentación (RA). Proporcional (P), Integral (I) y Derivativa (D). Sus nombres provienen de la operación matemática que efectúa el controlador sobre una determinada variable de error ( $e$ ).

#### 4.3.1. RA Proporcional (P)

La salida del controlador  $u$  es proporcional al error  $e$ ,

$$u = K_p e$$

Este es el caso del controlador de velocidad del motor DC que vimos anteriormente, y el controlador en la figura 4.4 b) es  $K_p = D(s)$ .

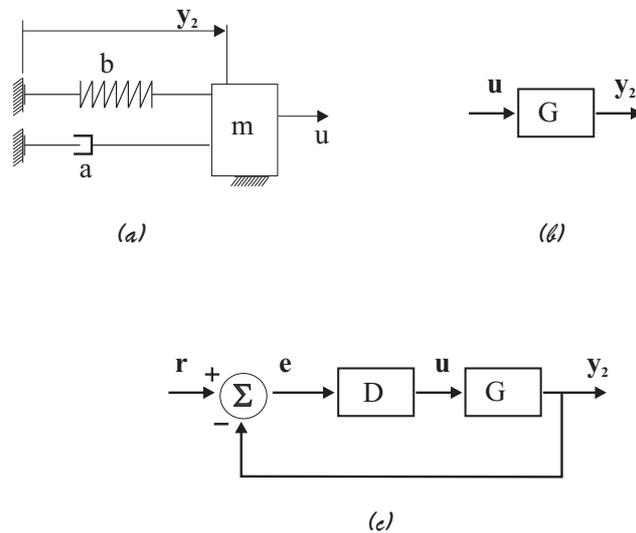


Figura 4.5: a) Sistema de Segundo orden y (b) su diagrama de bloque. c) Diagrama de bloque con controlador proporcional.

Consideremos el sistema de segundo orden de la figura 4.5 a,b), que tiene una ganancia  $G(s)$  dada por,

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + as + b}$$

Si le agregamos un controlador proporcional, el diagrama de bloque se transforma en el de la figura 4.5 c). Para este diagrama donde  $r$  es la señal de referencia ( $D(s) = K_p$ ) tenemos,

$$r - y = e$$

$$\begin{aligned}
 u &= eD \\
 y &= uG = eDG = (r - y)DG \Rightarrow \\
 \frac{y}{r} &= \frac{DG}{1 + DG} = \frac{K_p}{s^2 + as + b + K_p}
 \end{aligned}$$

El denominador nos entrega los polos de la función de transferencia con retro-alimentación proporcional. Aquí el resorte se encarga *naturalmente* de llevar la masa a la posición de equilibrio. Consideremos que no hay resorte ( $b = 0$ ), de manera que es el controlador quién se encargará de mantener la posición de la masa.

Si  $b = 0$ , las raíces de  $s^2 + as + b + K_p$  son

$$s = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - K_p}$$

Si  $K_p$  aumenta ( $0 < K_p < \frac{a^2}{4}$ ) la constante de tiempo del sistema decrece (polos hacia la izquierda).

Si  $K_p > \frac{a^2}{4}$  la parte real de las raíces no cambia con  $K_p$  pero la parte imaginaria crece ( $\omega_n$ ). Con lo cuál el  $t_r$  (rise time) decrece  $t_r \propto \omega_n^{-1}$ .

Si consideramos sistemas de orden superior, para  $K_p$  muy grande se pueden originar inestabilidades, es decir al menos un polo  $p = \sigma + j\omega$  tendrá parte real positiva  $\sigma > 0$ . En general la retro-alimentación proporcional aumenta la velocidad con la cual el error tiende a zero. En algunos casos lo va a eliminar completamente. Como vimos anteriormente  $K_p$  aumenta la magnitud de  $DG$  y  $DG$  reducía el error del sistema.

### 4.3.2. RA Integral (I)

En el caso de la RA integral, la salida del controlador es proporcional a la integral del error  $e$ , y tiene la forma

$$u(t) = \frac{K_p}{T_I} \int_{t_0}^t e dt$$

Con lo cuál el controlador es,

$$D(s) = \frac{K_p}{T_I s}$$

$T_I$  es una constante de tiempo llamada tiempo integral (o de reset). La ganancia del controlador es  $K_p/T_I$ . Este tipo de controlador va a entregar un valor finito de  $u$  incluso si no hay error  $e$ . Esto porque  $u$  es una función de los valores pasados de  $e$ . Estos se acumularan en el integrador ( $\Sigma$ ) incluso si el error actual se hace zero.

Esto hace más insensible el sistema frente a perturbaciones  $W$ . Si el sistema llega a tener error zero y aparece una perturbación  $W$ , el error residual va a ser utilizado para contrarestarla.

La razón principal de una RA Integral es eliminar errores en régimen estacionario, pero lamentablemente se va a reducir la estabilidad del sistema.

En el ejemplo del motor DC, cambiemos el controlador proporcional por uno integral.

$$V_a(s) = \frac{K_p}{T_I s} (\Omega_d - \Omega)$$

La ecuación diferencial del motor (con  $T_l = 0$ ) efectuando la  $TL$ , nos entrega una ecuación característica del denominador de la función de transferencia

$$\tau s^2 + s + \frac{K_o K_p}{T_I} = 0$$

Si incrementamos la *Ganancia del Controlador*  $K_p/T_I$ , obtenemos raíces de tiempo de decaimiento más grande (relajan más lentamente). Con lo cuál el sistema es menos estable. Aunque para el motor DC las raíces estan siempre en el lado negativo del eje  $Re(s)$ , veremos que en general agregar una RA integral va a reducir la estabilidad del sistema, cualquiera sea éste.

### 4.3.3. RA Derivativa (D)

Aquí la salida del controlador es proporcional a la derivada del error  $e$ , y tiene la forma

$$u(t) = K_p T_D \frac{de}{dt}$$

Aquí  $D(s) = K_p T_D s$ .  $T_D$  es el tiempo de derivación. Este controlador es usado generalmente en conjunto con uno integral o proporcional para incrementar el decaimiento de las raíces y así mejorar

la estabilidad del sistema. Este controlador no llevará jamás el error a cero. Para ellos debemos usar los otros controladores.

En el sistema de segundo orden de la figura 4.5 sin resorte, la ecuación característica es :

$$s^2 + (a + K_p T_D)s = 0$$

Y sus raíces son

$$s = 0, -(a + K_p T_D)$$

La raíz  $s = 0$  permanece ahí independiente del valor de  $K_p T_D$  y quiere decir que cualquier condición inicial sobre la posición  $y_2$  no podrá ser llevada hacia el valor deseado o referencia. Sin embargo, este controlador afecta la tasa a la cuál  $\dot{y}_2$  tiende a zero. Recuerde que la salida del controlador  $u$  es proporcional a la derivada del error.

#### 4.3.4. Retro-alimentación PID

Este tipo de retro-alimentación considera la acción simultánea (suma) de las tres RA anteriores. Si calculamos la transformada de Laplace de un controlador PID, tenemos:

$$U(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) e(s) \quad (4.16)$$

Con lo cuál

$$D(s) = K_p \frac{T_D s^2 + s + (1/T_I)}{s}$$

La combinación de los tres tipos de controlador provee una reducción aceptable del error y, al mismo tiempo, una estabilidad y amortiguamiento aceptables. Los controladores comerciales tienen típicamente la forma de la ecuación anterior. El ingeniero debe sólo ajustar los coeficientes (las tres constantes) basándose en los supuestos siguientes:

1. Incrementar  $[K_p, T_I^{-1}] \rightarrow$  Reduce los errores del sistema
2. Incrementar  $[T_I^{-1}] \rightarrow$  Reduce la Estabilidad
3. Incrementar  $[T_D] \rightarrow$  Mejora la Estabilidad

En la figura 4.6 se aprecia la evolución del error como respuesta a una perturbación unitaria tipo delta de Dirac (ver ecuación 4.15) usando los tres tipos de controladores,  $P$ ,  $PD$  y  $PID$ . Observe que la ventaja de utilizar un controlador  $PID$  es reducir el error a cero. Sin embargo hemos aumentado el orden de la polinomial del denominador de la función de transferencia.

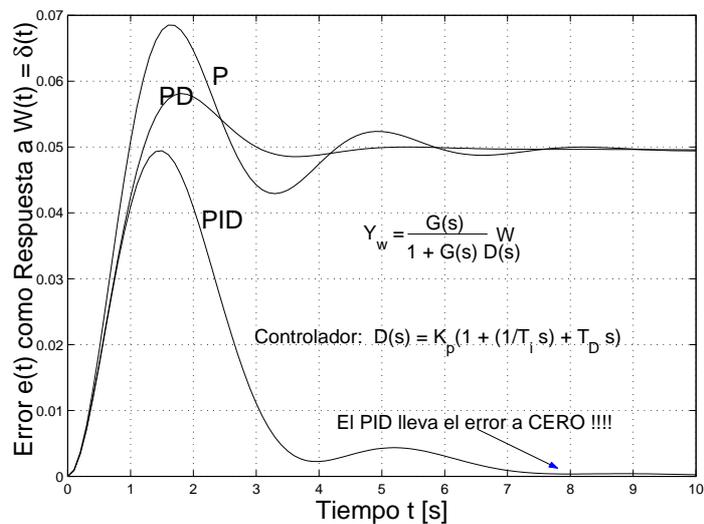


Figura 4.6: Respuesta de un sistema de Segundo Orden  $G(s) = 1/[(s+1)(5s+1)]$  a una perturbación unitaria  $W(t) = \delta(t)$

### Reset de un Integrador

Los actuadores comandados por un controlador tienen siempre un rango de operación limitado, como por ejemplo una válvula: ésta puede estar completamente cerrada o abierta, con lo cual el caudal de líquido no puede disminuir ni aumentar más allá de lo permitido por ella. Si se usa una RA integral, puede ocurrir que frente a un set point o referencia muy grande (brusca) el integrador entregue una salida muy grande que hará saturar al actuador, resultando Overshoots muy grandes.

La idea es que si uno impone una referencia brusca muy grande el actuador puede saturar. Supongamos que es así, y el actuador satura con un valor  $\pm u_{max}$  (Figura 4.7 a). El integrador continúa integrando el error  $e$  y su señal de salida  $u_c$  sigue creciendo, porque el error permanece ya que si el actuador está saturado la salida del sistema *planta* sigue fija (no cambia). En este caso el integrador no está llevando la salida al valor de referencia con lo cual se le debe *resetear* o apagar para que el actuador salga de la saturación. Este reset puede realizarse en forma manual (switch) o en forma automática.

Esto se logra agregando un lazo de control *No Lineal* sobre el integrador. En la figura 4.7 b) tenemos un controlador tipo PI, es decir un bloque  $K_p$  y un bloque integrador  $K_p/T_I s$ . El lazo de control no lineal sobre el integrador se activa cuando el actuador se satura: entonces este lazo lleva el error  $e_1$  a cero. Si la salida del actuador es  $u_{min} < |u_a| < u_{max}$  el lazo no hace nada y  $e_1 = e$ . Cuando  $u_{min} > |u_a| > u_{max}$  la región lineal de pendiente  $k$  de este lazo va a llevar el error que percibe el

integrador a cero de manera que el actuador salga de la saturación. En ese sentido la pendiente  $k$  va a determinar cuan rápido el lazo no lineal es capaz de seguir el error  $e$  para mantener fuera de saturación al actuador. (Figura 4.7 b).

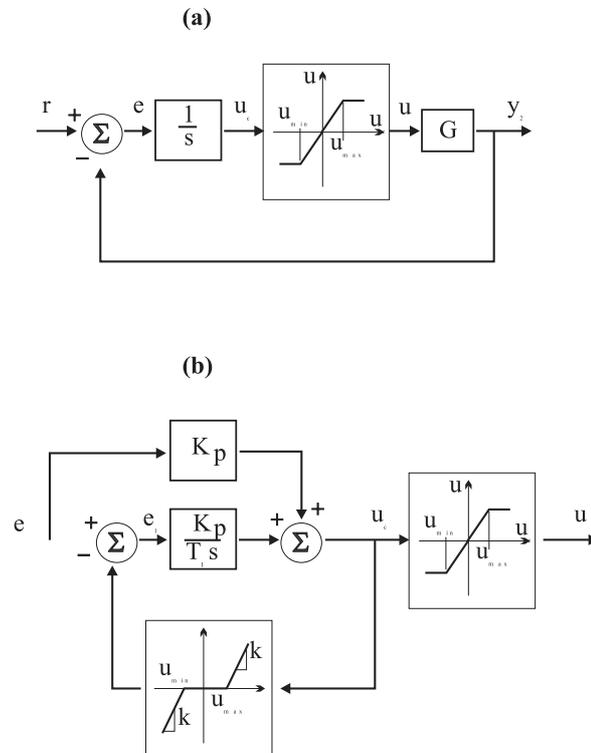


Figura 4.7: (a) Retro-Alimentación con Actuador que Satura. b) Reset del Controlador integral

#### 4.3.5. Ajuste de un controlador PID

Ziegler and Nichols desarrollaron métodos para ajustar un controlador PID en los años 40 basados en ensayos de lazo abierto y cerrado.

##### Ajuste en lazo abierto

Ziegler and Nichols reconocieron que la mayoría muchos sistemas (plantas) responden al escalón unitario con una curva de respuesta característica (Figura 4.8 a). Esta puede ser generada experimentalmente o simulada a través de los parámetros del proceso. La forma de la curva es universal en sistemas de orden superior y puede ser aproximada por

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K e^{-\tau_d s}}{\tau s + 1}$$

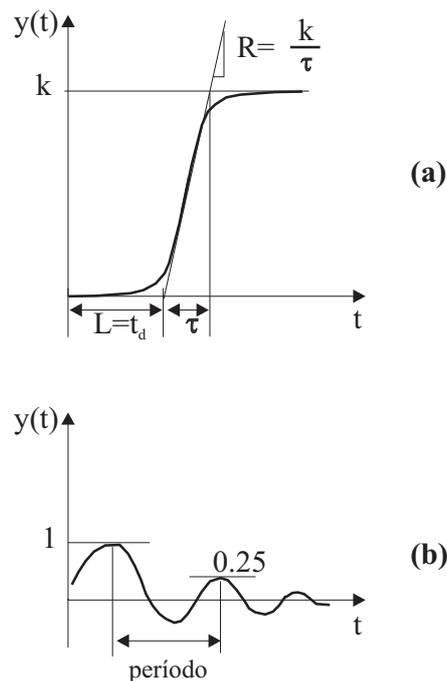


Figura 4.8: a) Curva característica de respuesta tipo S b) Caída de amplitud de 1/4 en un período.

que es simplemente una función de primer orden con un retardo (lag). Las constantes se determinan a partir de la **respuesta al escalón** de la planta. La tangente en el punto de inflexión entrega una pendiente  $T = K/\tau$ . La intersección de la tangente con el eje temporal entrega el retardo  $L = t_d$ . Si la planta no presenta una salida similar a ésta, entonces se le pueden agregar otros polos para ajustarla a esta curva universal.

**Procedimiento:** (1) Excitar la planta con un escalón unitario, (2) Registrar la salida y determinar los parámetros del proceso, es decir, la ganancia del proceso  $k$ , el tiempo muerto o retardo  $t_d$ , la constante de tiempo  $\tau$ , luego calcular  $L, R$  y de acuerdo a la tabla siguiente imponer los parámetros del controlador PID cuya función es:

$$G_c(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) \quad (4.17)$$

Controlador	Ganancia Optima
P	$K_p = \frac{1}{RL}$
PI	$K_p = \frac{0,9}{RL}, T_I = \frac{L}{0,3}$
PID	$K_p = \frac{1,2}{RL}, T_I = 2L, T_D = 0,5L$

Los parámetros fueron obtenidos por ellos a partir de una razón de decaimiento para la respuesta  $y(t)$  de 0,25. La respuesta cae a un cuarto de su amplitud máxima inicial luego de un período de oscilación (Figura 4.8 b). Esto corresponde a un parámetro de amortiguamiento de  $\zeta = 0,21$  es decir  $e^{-\zeta\omega_n T} = 0,25$  con  $T = 2\pi/\omega_n$ .

### Ajuste en lazo cerrado

Este criterio (el más usado) para ajustar los parámetros del PID se basa en la evaluación de los *límites de estabilidad* del sistema. La ganancia proporcional  $K_p$  se aumenta hasta que aparecen oscilaciones (sistema marginalmente estable). Se determina así la ganancia última  $K_u$  y el período último  $P_u$  observando la salida del sistema.

**Procedimiento:** (1) Desconectar el derivador e integrador de manera de tener una acción proporcional pura. (2) Excitar el sistema retroalimentado con un escalón de referencia (ER) y registrar la salida. (3) Repetir el test ER incrementando/reduciendo la ganancia  $K_p$  hasta que aparece una oscilación estable en la salida. Esta es la ganancia  $K_u$  del sistema o ganancia límite de estabilidad. Luego se registra el período de la oscilación en la salida  $P_u$  del sistema. Estos dos valores luego se usan para calcular los parámetros óptimos del PID como aparece en la tabla siguiente.

Controlador	Ganancia Optima
P	$K_p = 0,5K_u$
PI	$K_p = 0,45K_u, T_I = P_u/1,2$
PID	$K_p = 0,6K_u, T_I = P_u/2, T_D = P_u/8$

Evidentemente en la práctica será necesario afinar *a la mano* los parámetros para ajustarse finalmente a las condiciones particulares de cada sistema.

## 4.4. Estabilidad

Un sistema es estable si su respuesta a tiempos grandes ( $t \rightarrow \infty$ ) es acotada. Esto quiere decir que si el sistema es sometido a una perturbación en un momento dado, éste tiende a volver a su estado inicial. Esta definición es perfectamente válida para sistemas lineales. La respuesta estable de tales sistemas es amortiguada.

Este es el problema más importante en teoría de control lineal. Dijimos que la estabilidad de un sistema de control de lazo cerrado se satisface si todos los polos se ubican en el lado izquierdo del plano- $s$ .

Aquí veremos conceptos de estabilidad de sistemas lineales, más tarde revisaremos los conceptos de estabilidad de Nyquist (respuesta en frecuencia) y Lyapunov.

### 4.4.1. Estabilidad BIBO

Un sistema es estable (bounded-input bounded-output) si para cada entrada acotada habrá una salida acotada también (sin importar lo que ocurre al interior).

Un test para esta propiedad se desprende del teorema de convolución que vimos en el capítulo I. Si el sistema enfrenta una entrada  $u(t)$ , y salida  $y(t)$ , con respuesta impulsional  $h(t)$ , entonces

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t - \tau)d\tau$$

Si  $u(t)$  es acotada, entonces hay una constante  $M$  tal que  $|u| \leq M < \infty$ , y la salida será acotada por

$$\begin{aligned} |y| &= \left| \int h u d\tau \right| \\ &\leq \int |h||u|d\tau && \text{Schwarz} \\ &\leq M \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau}_A \end{aligned}$$

La salida será acotada si la integral  $A$  es acotada. Por otro lado, supongamos que la integral **no** es acotada, y consideramos una entrada acotada  $u(t - \tau) = +1$  si  $h(\tau) > 0$ , y  $u(t - \tau) = -1$  si  $h(\tau) < 0$ . En este caso

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau = \int_0^{\infty} d\tau$$

Que no es acotado.

Basta que la respuesta impulsional del sistema  $h(t)$  sea constante, para que el sistema no sea estable BIBO. En estricto rigor, el sistema será acotado si los polos se encuentran en el lado izquierdo del plano- $s$  (excluido el eje imaginario).

#### 4.4.2. Criterio de estabilidad de Routh

El criterio de Routh (1874) permite determinar el número de polos de lazo cerrado que caen en el lado derecho del plano- $s$  sin tener que factorizar los polinomios  $Nu(s), Den(s)$  para encontrar los polos.

Considere la ecuación característica polinomial monic, con coeficiente de la potencia más alta = 1

$$a(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n \quad (4.18)$$

1. Condición **necesaria** para estabilidad: todas las raíces de 4.18 tengan parte real  $< 0 \Rightarrow$  que todos los  $a_i > 0$ . Si un coeficiente = 0 (falta) o es negativo, el sistema tendrá polos ubicados en el lado derecho del plano- $s$ .
2. Condición **necesaria y suficiente** para estabilidad: Todos los elementos de la primera columna de la matriz de Routh  $> 0$ .

Para determinar la matriz de Routh procedemos como sigue: Primero creamos la primera y segunda fila de la matriz con los coeficientes de la ec. característica. Partiendo con el coeficiente de la potencia más alta ( $s^n$ ) que es 1. Completamos esa fila con los coeficientes restantes saltándonos uno cada vez. La segunda fila comienza con el segundo coeficiente, correspondiente a la potencia siguiente ( $s^{n-1}$ ). Completamos con los coeficientes no usados en la primera fila. Las demás filas se construyen con los determinantes normalizados (de signo cambiado).

$$\begin{array}{l} s^n \quad : 1 \quad a_2 \quad a_4 \quad \dots \\ s^{n-1} : a_1 \quad a_3 \quad a_5 \quad \dots \\ s^{n-2} : b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad \dots \\ s^{n-3} : c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad \dots \\ \\ s^2 \quad : * \quad * \quad * \quad * \\ s^1 \quad : * \quad * \quad * \quad * \\ s^0 \quad : a_n \end{array}$$

donde

$$b_1 = -\frac{1}{a_1} \det \begin{bmatrix} 1 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{bmatrix}$$

$$b_2 = -\frac{1}{a_1} \det \begin{bmatrix} 1 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{bmatrix}$$

$$b_3 = -\frac{1}{a_1} \det \begin{bmatrix} 1 & a_6 \\ a_1 & a_7 \end{bmatrix}$$

$$c_1 = -\frac{1}{b_1} \det \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$$

$$c_2 = -\frac{1}{b_1} \det \begin{bmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_3 \end{bmatrix}$$

$$c_3 = -\frac{1}{b_1} \det \begin{bmatrix} a_1 & a_7 \\ b_1 & b_4 \end{bmatrix}$$

Veamos un ejemplo para construir la matriz de Routh. Consideremos la ecuación característica

$$a(s) = s^6 + 4s^5 + 3s^4 + 2s^3 + s^2 + 4s + 4$$

Todos los  $a_i > 0$  y distintos de 0. Para formar la matriz de Routh colocamos una primera fila partiendo con el primer coeficiente de  $a(s)$  ( $= 1$ ) seguido por los  $a_i$  pares. La segunda fila comienza con el segundo coeficiente de  $a(s)$  ( $a_1$ ) seguido por los coeficientes impares. Las siguientes filas son completadas calculando los determinantes entre la primera columna y las siguientes. Hasta completar  $s^0$ .

El número de raíces en el lado derecho del plano- $s$  es igual al número de cambios de signo en la primera columna. Un  $+, -, + \rightarrow$  dos cambios de signo con lo cual dos raíces en RHP. Para nuestra ecuación característica, la matriz es:

$$\begin{array}{l} s^6 : \quad 1 \qquad \qquad \qquad 3 \qquad \qquad \qquad 1 \qquad 4 \\ s^5 : \quad 4 \qquad \qquad \qquad 2 \qquad \qquad \qquad 4 \qquad 0 \\ s^4 : \quad \frac{5}{2} = \frac{(4)(3)-(1)(2)}{4} \qquad 0 = \frac{(4)(1)-(4)(1)}{4} \qquad 4 = \frac{(4)(4)-(1)(0)}{4} \\ s^3 : \quad 2 = \frac{(5/2)(2)-(4)(0)}{5/2} \qquad -\frac{12}{5} = \frac{(5/2)(4)-(4)(4)}{5/2} \qquad 0 \\ s^2 : \quad 3 = \frac{(2)(0)-(5/2)(-12/5)}{2} \qquad 4 = \frac{(2)(4)-(5/2)(0)}{2} \\ s^1 : \quad -\frac{76}{15} = \frac{(3)(-12/5)-(8)}{3} \qquad 0 \\ s^0 : \quad 4 = \frac{(-76/15)(4)-0}{-76/15} \end{array}$$

Se ve que la polinomial tiene raíces en el lado derecho del plano- $s$ , ya que no todos los elementos de la primera columna son positivos. Hay dos polos en RHP porque hay dos cambios de signo. Note que el último elemento no nulo en cada fila es  $a_n$ .

Si el primer término en una de las filas es  $= 0$  o si la fila entera es  $= 0$ , la matriz estándar de Routh no se puede formar, y debemos usar una técnica especial.

### Casos Especiales

Si sólo el primer elemento en una fila es cero, reemplazamos ese *cero* por  $\epsilon > 0$  y efectuamos los mismos pasos que vimos anteriormente. Luego aplicamos nuestro criterio de estabilidad tomando el límite  $\epsilon \rightarrow 0$ . Veamos un ejemplo.

$$a(s) = s^4 + 5s^3 + 7s^2 + 5s + 6$$

La matriz de Routh es la sgte:

$$\begin{array}{l} s^4 : \quad 1 \qquad \qquad 7 \qquad \qquad 6 \\ s^3 : \quad 5 \qquad \qquad 5 \\ s^2 : \quad 6 = \frac{(5)(7)-(5)}{5} \quad 6 = \frac{(5)(6)-(0)}{5} \\ s^1 : \quad \epsilon \\ s^0 : \quad 6 \end{array}$$

Si  $\epsilon > 0$  no hay cambio de signo (estable). Si  $\epsilon < 0$  hay 2 cambios de signo (dos raíces en el lado derecho del plano  $-s$ ). Entonces si  $\epsilon = 0$ , esto indica que hay dos raíces imaginarias puras, y una perturbación pequeña va a enviarlas ya sea al lado izquierdo o derecho del plano  $-s$ .

Existe una alternativa, y es incluir la variable auxiliar  $z = 1/s$  y así convertir la ec. característica en términos de  $z$ . Esto produce en general una matriz de Routh con los elementos de la primera columna distintos de cero.

Otro caso especial ocurre cuando una fila entera es cero. Esto indica que hay pares de raíces complejo conjugado. Si la fila  $i$ -ésima es cero, se debe formar una ecuación auxiliar con la primera fila previa distinta de cero.:

$$a_1(s) = \beta_1 s^{i+1} + \beta_2 s^{i-1} + \beta_3 s^{i-3} + \dots$$

donde  $\beta_i$  es el coeficiente de la fila  $(i - 1)$ .

Luego reemplazamos la  $i$ -ésima fila con los coeficientes de la *derivada* de esta polinomial auxiliar y completamos la matriz de Routh. Ojo que las raíces de la polinomial auxiliar son también raíces de la ec. característica original, por lo tanto deben ser tratadas separadamente. Veamos un ejemplo: Consideremos la polinomial:

$$a(s) = s^5 + 6s^4 + 12s^3 + 12s^2 + 11s + 6$$

La matriz de Routh es:

$$\begin{array}{rcl}
s^5 & : & 1 \quad 12 \quad 11 \\
s^4 & : & 6 \quad 12 \quad 6 \\
s^3 & : & 10 \quad 10 \quad 0 \\
s^2 & : & 6 \quad 6 \quad 0 \\
s^1 & : & 0 \quad 0 \quad \rightarrow a_1(s) = 6s^2 + 6 \\
s^1 & : & 12 \quad 0 \quad \leftarrow \frac{da_1(s)}{ds} = 12s \\
s^0 & : & 6
\end{array}$$

Vemos que no hay cambios de signo en la primera columna, por lo tanto todas las raíces tienen parte real  $< 0$ , excepto por un par de raíces complejo conjugado de la polinomial auxiliar:

$$a_1(s) = 6s^2 + 6 \rightarrow s = \pm j$$

El método de Routh es muy útil para determinar el rango de parámetros para el cual un sistema retro-alimentado sigue siendo estable. Considere el sistema de la figura sgte:

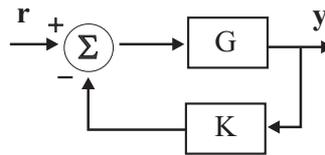


Figura 4.9: Sistema Retro-Alimentado

La estabilidad del sistema depende de la ganancia  $K$  ( $K > 0$ ). La ecuación característica es  $1 + KG(s) = 0$  con  $G(s)$  dado por:

$$G(s) = \frac{(s + 1)}{s(s - 1)(s + 6)}$$

con lo cual tenemos que:

$$a(s) = s^3 + 5s^2 + (K - 6)s + K$$

Ud. puede notar que al aplicar la condición necesaria de Routh a esta ecuación, se limita el rango de valores de  $K$  para los cuales el sistema es estable:  $K > 6$ .

Si construimos la matriz de Routh, podemos afinar aún más la condición para  $K$ :

$$\begin{array}{rcl}
s^3 & : & 1 \quad (K - 6) \\
s^2 & : & 5 \quad K \\
s^1 & : & \frac{5(K-6)-K}{5} \quad 0 \\
s^0 & : & K
\end{array}$$

El sistema permanecerá estable si no hay cambio de signo en la primera columna. Si ya  $K > 0$  entonces basta asegurar que

$$\frac{5(K - 6) - K}{5} > 0$$

con lo cual  $K > 7,5$ .