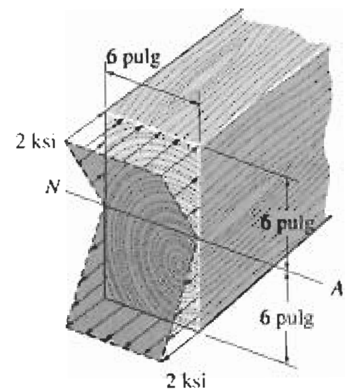
EJEMPLO 6-14

Una viga tiene sección transversal rectangular y está sometida a la distribución de esfuerzo mostrada en la figura 6–27*a*. Determine el momento interno **M** en la sección causado por la distribución de esfuerzo (*a*) usando la fórmula de la flexión, (*b*) calculando la resultante de la distribución del esfuerzo mediante principios básicos.



(a)

Figura 6–27

SOLUCIÓN

Parte (a). La fórmula de la flexión es $\sigma_{\text{máx}} = Mc/I$. De la figura 6–27*a*, $c = 6$ pulg y $\sigma_{\text{máx}} = 2$ ksi. El eje neutro se define como la línea *NA*, porque el esfuerzo es cero a lo largo de esta línea. Como la sección transversal tiene una forma rectangular, el momento de inercia de la sección respecto al *NA* se determina con la fórmula para un rectángulo dado en el forro interior de este texto; esto es,

$$I = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12}(6 \text{ pulg})(12 \text{ pulg})^3 = 864 \text{ pulg}^4$$

Por tanto,

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Mc}{I}; \qquad 2 \text{ kip/pulg}^2 = \frac{M(6 \text{ pulg})}{864 \text{ pulg}^4}$$

$$M = 288 \text{ kip} \cdot \text{pulg} = 24 \text{ kip} \cdot \text{pie} \qquad \textit{Resp.}$$

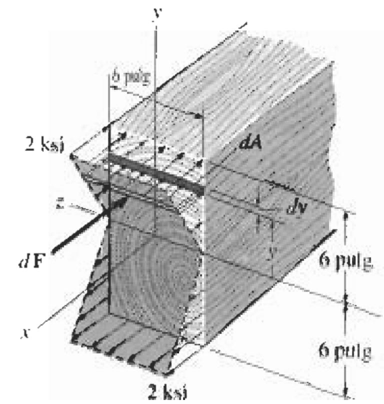
Parte (b). Demostraremos primero que la fuerza resultante de la distribución del esfuerzo es cero. Como se muestra en la figura 6–27*b*, el esfuerzo que actúa sobre la franja arbitraria $dA = (6 \text{ pulg})\, dy$, localizada a una distancia y del eje neutro, es:

$$\sigma = \left(\frac{-y}{6 \text{ pulg}}\right)(2 \text{ kip/pulg}^2)$$

La fuerza generada por este esfuerzo es $dF = \sigma\, dA$, y entonces, para la sección transversal entera,

$$F_R = \int_A \sigma\, dA = \int_{-6 \text{ pulg}}^{6 \text{ pulg}} \left[\left(\frac{-y}{6 \text{ pulg}}\right)(2 \text{ kip/pulg}^2)\right](6 \text{ pulg})\, dy$$

$$= (-1 \text{ kip/pulg}^2)\, y^2 \Big|_{-6 \text{ pulg}}^{+6 \text{ pulg}} = 0$$



(b)

El momento resultante de la distribución del esfuerzo respecto al eje neutro (eje z) debe ser igual a M. Como la magnitud del momento $d\mathbf{F}$ respecto a este eje es $dM = y\, dF$, y $d\mathbf{M}$ es *siempre positiva*, figura 6–27*b*, entonces para la sección entera,

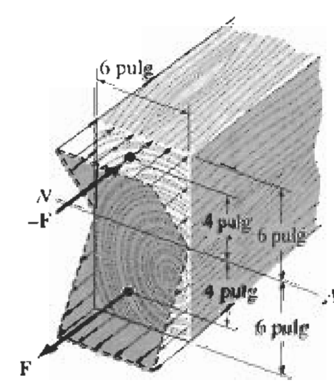
$$M = \int_A y\, dF = \int_{6 \text{ pulg}}^{6 \text{ pulg}} y\left[\left(\frac{-y}{6 \text{ pulg}}\right)(2 \text{ kip/pulg}^2)\right](6 \text{ pulg})\, dy$$

$$= \left(\frac{2}{3} \text{ kip/pulg}^2\right) y^3 \Big|_{-6 \text{ pulg}}^{+6 \text{ pulg}}$$

$$= 288 \text{ kip} \cdot \text{pnlg} = 24 \text{ kip} \cdot \text{pie} \qquad \textit{Resp.}$$

El resultado anterior puede también determinarse sin integración. La fuerza resultante para cada una de las dos distribuciones triangulares de esfuerzo en la figura 6–27*c* es gráficamente equivalente al volumen contenido dentro de cada distribución de esfuerzo. Así entonces, cada volumen es:

$$F = \frac{1}{2}(6 \text{ pulg})(2 \text{ kip/pulg}^2)(6 \text{ pulg}) = 36 \text{ kip}$$



(c)

Esas fuerzas, que forman un par, actúan en el mismo sentido que los esfuerzos dentro de cada distribución, figura 6–27*c*. Además, actúan pasando por el centroide de cada volumen, esto es, $\frac{1}{3}(6 \text{ pulg}) = 2$ pulg desde las partes superior e inferior de la viga. Por tanto, la distancia entre ellas es de 8 pulg, tal como se muestra. El momento del par es entonces:

$$M = 36 \text{ kip } (8 \text{ pulg}) = 288 \text{ kip} \cdot \text{pulg} = 24 \text{ kip} \cdot \text{pie} \qquad \textit{Resp.}$$

EJEMPLO 6-15

La viga simplemente apoyada en la figura 6–28a tiene la sección transversal mostrada en la figura 6–28b. Determine el esfuerzo máximo absoluto de flexión en la viga y dibuje la distribución del esfuerzo en la sección transversal en esta localidad.

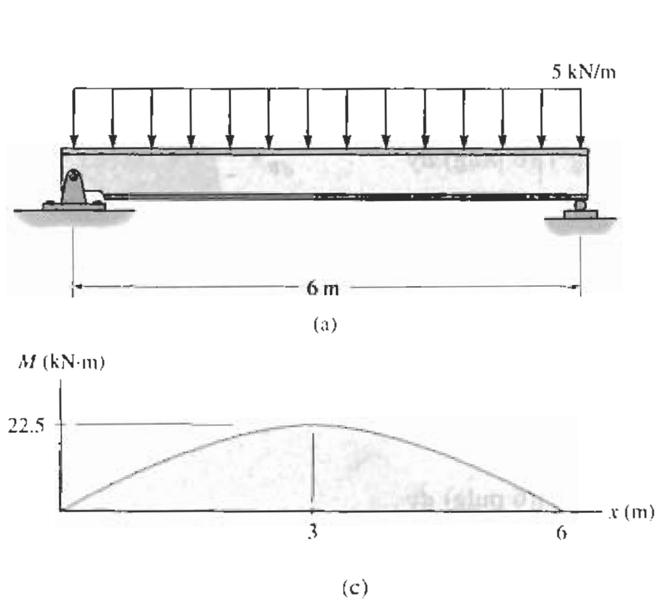


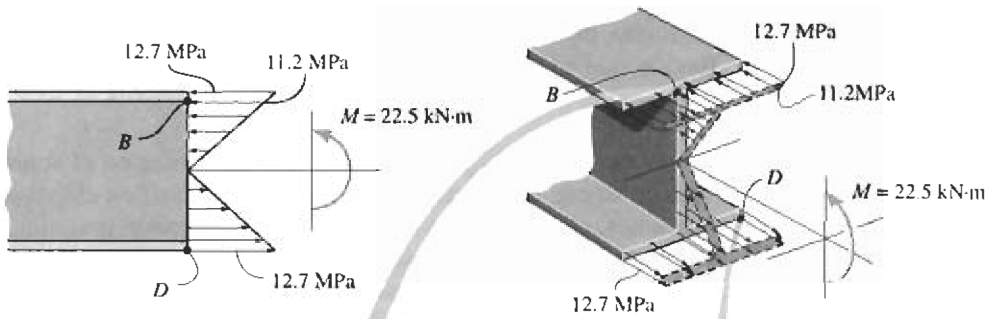
Figura 6–28

SOLUCIÓN

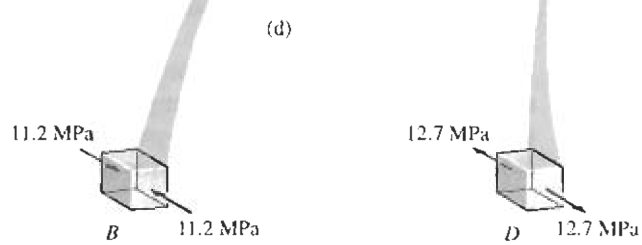
Momento interno máximo. El momento interno máximo en la viga, $M = 22.5\ \text{kN} \cdot \text{m}$, ocurre en el centro del claro como se muestra en el diagrama de momento flexionante, figura 6-28c. Vea el ejemplo 6–3.

Propiedades de la sección. Por razones de simetría, el centroide C y el eje neutro pasan por la mitad de la altura de la viga, figura 6–28b. La sección transversal se subdivide en las tres partes mostradas y el momento de inercia de cada parte se calcula respecto al eje neutro usando el teorema de los ejes paralelos. (Vea la ecuación A–5 del apéndice A.) Trabajando en metros, tenemos:

$$
\begin{aligned}
I &= \Sigma(\bar{I} + Ad^2) \\
&= 2\left[\frac{1}{12}(0.25\ \text{m})(0.020\ \text{m})^3 + (0.25\ \text{m})(0.020\ \text{m})(0.160\ \text{m})^2\right] \\
&\quad + \left[\frac{1}{12}(0.020\ \text{m})(0.300\ \text{m})^3\right] \\
&= 301.3(10^{-6})\ \text{m}^4
\end{aligned}
$$



(d)



(e)

Esfuerzo de flexión. Aplicando la fórmula de la flexión, con c = 170 mm, el esfuerzo máximo absoluto de flexión es:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Mc}{I}; \quad \sigma_{\text{máx}} = \frac{22.5 \text{ kN} \cdot \text{m}(0.170 \text{ m})}{301.3(10^{-6}) \text{ m}^4} = 12.7 \text{ MPa} \qquad \textit{Resp.}$$

En la figura 6–28*d* se muestran vistas bi y tridimensionales de la distribución del esfuerzo. Note cómo el esfuerzo en cada punto sobre la sección transversal desarrolla una fuerza que contribuye con un momento $d\mathbf{M}$ respecto al eje neutro que tiene el mismo sentido que **M**. Específicamente, en el punto B, y_B = 150 mm, por lo que:

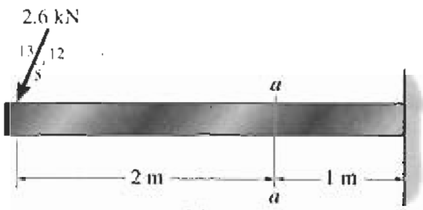
$$\sigma_B = \frac{My_B}{I}; \quad \sigma_B = \frac{22.5 \text{ kN} \cdot \text{m}(0.150 \text{ m})}{301.3(10^{-6}) \text{ m}^4} = 11.2 \text{ MPa}$$

El esfuerzo normal que actúa sobre elementos de material localizados en los puntos B y D se muestra en la figura 6–28*e*.

EJEMPLO 6–16

La viga mostrada en la figura 6–29*a* tiene una sección transversal en forma de canal, figura 6–29*b*. Determine el esfuerzo máximo de flexión que se presenta en la sección *a–a* de la viga.

SOLUCIÓN



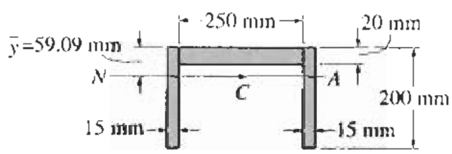
(a)

Momento interno. En este caso, las reacciones en el soporte de la viga no tienen que determinarse. Podemos usar, con el método de las secciones, el segmento a la izquierda de la sección *a–a*, figura 6–29*c*. En particular, advierta que la fuerza axial interna resultante **N** pasa por el centroide de la sección transversal. Observe también que el momento interno resultante debe calcularse respecto al eje neutro de la viga en la sección *a–a*.

Para encontrar la posición del eje neutro, la sección transversal se subdivide en tres partes componentes, como se muestra en la figura 6–29*b*. Como el eje neutro pasa por el centroide, usando la ecuación *A*–2 del apéndice *A*, tenemos entonces:

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y} A}{\Sigma A} = \frac{2[0.100\text{ m}](0.200\text{ m})(0.015\text{ m}) + [0.010\text{ m}](0.02\text{ m})(0.250\text{ m})}{2(0.200\text{ m})(0.015\text{ m}) + 0.020\text{ m}(0.250\text{ m})}$$

$$= 0.05909\text{ m} = 59.09\text{ mm}$$

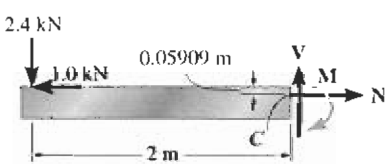


(b)

Esta posición se muestra en la figura 6–29*c*.

Aplicando la ecuación de equilibrio por momentos respecto al eje neutro, tenemos:

$$\circlearrowleft\!+ \Sigma M_{NA} = 0; \qquad 2.4\text{ kN}(2\text{ m}) + 1.0\text{ kN}(0.05909\text{ m}) - M = 0$$
$$M = 4.859\text{ kN}\cdot\text{m}$$



(c)

Figura 6–29

Propiedades de la sección. El momento de inercia respecto al eje neutro se determina usando el teorema de los ejes paralelos, aplicado a cada una de las tres partes componentes de la sección transversal. Trabajando en metros, tenemos:

$$I = \left[\frac{1}{12}(0.250\text{ m})(0.020\text{ m})^3 + (0.250\text{ m})(0.020\text{ m})(0.05909\text{ m} - 0.010\text{ m})^2\right]$$
$$+ 2\left[\frac{1}{12}(0.015\text{ m})(0.200\text{ m})^3 + (0.015\text{ m})(0.200\text{ m})(0.100\text{ m} - 0.05909\text{ m})^2\right]$$
$$= 42.26(10^{-6})\text{ m}^4$$

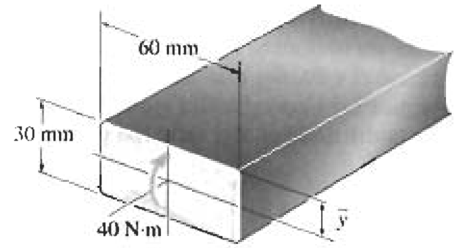
Esfuerzo máximo de flexión. El esfuerzo máximo de flexión ocurre en los puntos más alejados del eje neutro. En este caso, el punto más alejado está en el fondo de la viga; $c = 0.200\text{ m} - \bar{y} = 0.1409\text{ m}$. Entonces,

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Mc}{I} = \frac{4.859\text{ kN}\cdot\text{m}(0.1409\text{ m})}{42.26(10^{-6})\text{ m}^4} = 16.2\text{ MPa} \qquad \textit{Resp.}$$

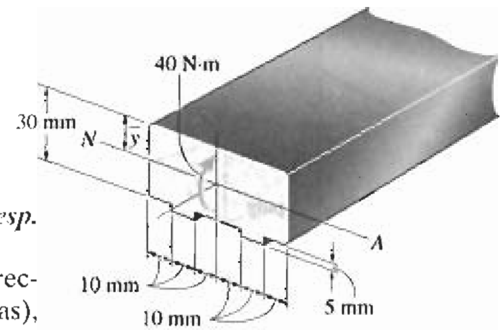
Muestre que en la parte superior de la viga el esfuerzo de flexión es $\sigma' = 6.79$ MPa. Note que además de este efecto de flexión, la fuerza normal de $N = 1$ kN y la fuerza cortante $V = 2.4$ kN contribuirán también con esfuerzos adicionales sobre la sección transversal. La superposición de todos esos efectos se verá en un capítulo posterior.

EJEMPLO 6-17

El miembro con sección transversal rectangular, figura 6–30*a*, está diseñado para resistir un momento de 40 N · m. Para aumentar su resistencia y rigidez, se propone añadir dos pequeñas costillas en su fondo, figura 6–30*b*. Determine el esfuerzo normal máximo en el miembro para ambos casos.



(a)



(b)

Figura 6–30

SOLUCIÓN

Sin costillas. Es claro que el eje neutro se localiza en el centro de la sección transversal, figura 6–30*a*, por lo que $\bar{y} = c = 15$ mm $= 0.015$ m. Así,

$$I = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12}(0.06 \text{ m})(0.03 \text{ m})^3 = 0.135(10^{-6}) \text{ m}^4$$

Por tanto, el esfuerzo normal máximo es:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Mc}{I} = \frac{(40 \text{ N}\cdot\text{m})(0.015 \text{ m})}{0.135(10^{-6}) \text{ m}^4} = 4.44 \text{ MPa} \qquad \textit{Resp.}$$

Con costillas. En la figura 6–30*b*, segmentando la sección en el rectángulo grande principal y en los dos rectángulos inferiores (costillas), la posición del centroide y del eje neutro se determinan como sigue:

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y} A}{\Sigma A}$$

$$= \frac{[0.015 \text{ m}](0.030 \text{ m})(0.060 \text{ m}) + 2[0.0325 \text{ m}](0.005 \text{ m})(0.010 \text{ m})}{(0.03 \text{ m})(0.060 \text{ m}) + 2(0.005 \text{ m})(0.010 \text{ m})}$$

$$= 0.01592 \text{ m}$$

Este valor no representa a c. Más bien,

$$c = 0.035 \text{ m} - 0.01592 \text{ m} = 0.01908 \text{ m}$$

Usando el teorema de los ejes paralelos, el momento de inercia

$$I = \left[\frac{1}{12}(0.060 \text{ m})(0.030 \text{ m})^3 + (0.060 \text{ m})(0.030 \text{ m})(0.01592 \text{ m} - 0.015 \text{ m})^2\right]$$

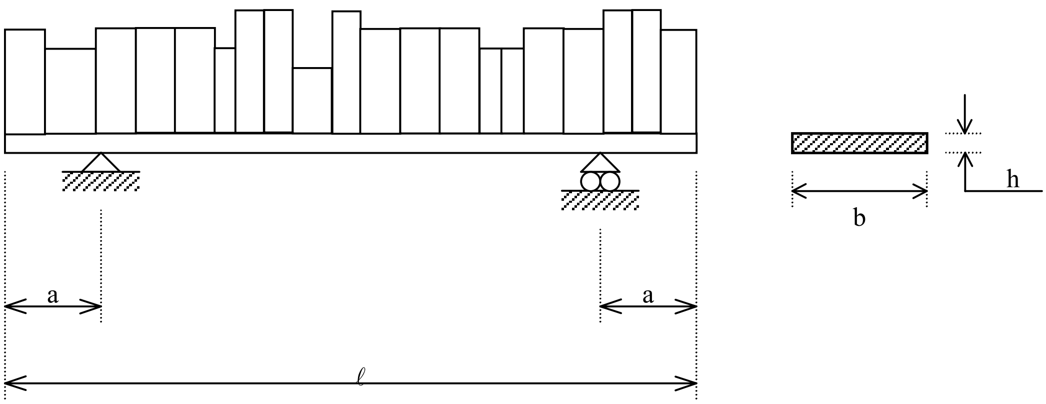
$$+ 2\left[\frac{1}{12}(0.010 \text{ m})(0.005 \text{ m})^3 + (0.010 \text{ m})(0.005 \text{ m})(0.0325 \text{ m} - 0.01592 \text{ m})^2\right]$$

$$= 0.1642(10^{-6}) \text{ m}^4$$

respecto al eje neutro es:

Problema 5.3

Un estudiante ha decidido instalar un estante para colocar sus libros y apuntes. Los ha colocado uno junto al otro y ha medido la longitud total de estante que necesita y la anchura que debe tener. Al ir a comprar el estante ve que para estas dimensiones puede escoger varios espesores distintos. No sabe cuál escoger. Entonces recurre a un amigo suyo que está haciendo 3er curso de Ingeniería Industrial y le expone el problema:
He decidido instalar un estante para libros, según el croquis de la figura:



$\ell = 100$ cm $\qquad a = 15$ cm $\qquad b = 20$ cm $\qquad p_{libros\ y\ apuntes} = 0{,}6$ Kg/cm

En la tienda me han informado de que la madera de los estantes tiene las siguientes características mecánicas:

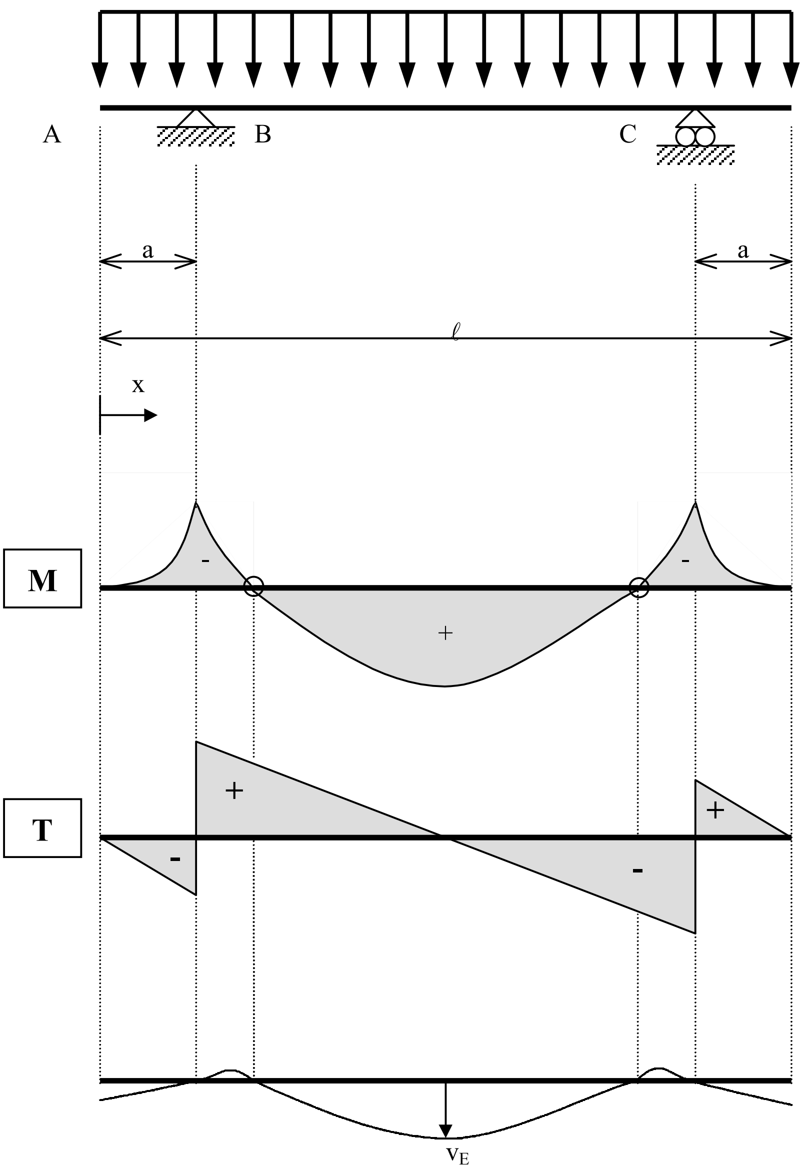
$$\sigma_{adm} = 4 \text{ N/mm}^2 \qquad E = 10\,000 \text{ N/mm}^2$$

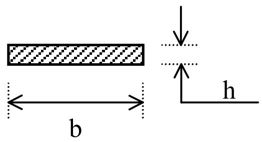
La cuestión es:

a) ¿De qué espesor *h* mínimo debo colocar el estante?
b) Los dos apoyos los he colocado, simétricamente, a una distancia a = 15 cm del extremo por razones puramente estéticas. Pero, atendiendo a razones de comportamiento resistente, ¿cuál sería la distancia óptima de los apoyos a los extremos, que podría minimizar el espesor *h* del estante?
c) Finalmente, me preocupa saber cuál será la flecha que tendrá el estante, una vez cargado, en su punto central (con la distancia *a* inicial).

Resolución:

a) Determinación de *h* mínima.





$$R_B = R_C = \frac{p\ell}{2}$$

Tramo AB:

$$M = -p\frac{x^2}{2}$$

$$M_A = 0 \quad M_B = -p\frac{a^2}{2}$$

$$T = -p \cdot x$$

$$T_A = 0 \qquad T_B = -p \cdot a$$

Tramo BC:

$$M = -p\frac{x^2}{2} + p\frac{\ell}{2}(x-a) \quad \Rightarrow \qquad M_B = -p\frac{a^2}{2} + p\frac{\ell}{2}(a-a) = -p\frac{a^2}{2}$$

$$M_C = M_B = -p\frac{a^2}{2}$$

$$\left(x_E = \frac{\ell}{2}\right) \qquad M_E = -p\frac{\ell^2}{8} + p\frac{\ell^2}{4} - p\frac{\ell \cdot a}{2} = p\frac{\ell^2}{8} - p\frac{\ell \cdot a}{2}$$

$$T = -p \cdot x + p\frac{\ell}{2} \qquad T_B = -p \cdot a + p\frac{\ell}{2}$$

$$T_C = -p \cdot (\ell - a) + p\frac{\ell}{2} = p \cdot a - p\frac{\ell}{2}$$

Tramo CD:

$$M = -p\frac{x^2}{2} + p\frac{\ell}{2}(x-a) + p\frac{\ell}{2}(x-(\ell-a)) = -p\frac{x^2}{2} + p\frac{\ell}{2}(x-a+x-\ell+a)$$

$$M = -p\frac{x^2}{2} + p\frac{\ell}{2}(2x-\ell) \qquad M_C = -p\frac{(\ell-a)^2}{2} + p\frac{\ell}{2}(2(\ell-a)-\ell) = -p\frac{a^2}{2}$$

$$M_D = -p\frac{\ell^2}{2} + p\frac{\ell}{2}(2\ell-\ell) = 0$$

$$T = -p \cdot x + p \cdot \ell \qquad T_C = -p(\ell-a) + p \cdot \ell = p \cdot a$$

$$T_D = -p \cdot \ell + p \cdot \ell = 0$$

Con ℓ = 100 cm, a = 15 cm y p = 0,6 Kg/cm, tenemos los siguientes resultados:

$$M_B = M_C = -112{,}5 \cdot p = -67{,}5 \text{ cmKg}$$

$$M_E = 500 \cdot p = 300 \text{ cmKg}$$

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{|M_{\text{máx}}|}{W_z} = \frac{M_E}{W_z} \le \sigma_{adm} = 40{,}77 \text{ Kg/cm}^2 \quad \Rightarrow \quad W_{z,\text{mín}} = \frac{M_E}{40.77} - \frac{b \cdot h^2}{6}$$

$$\underset{(b=20)}{\Rightarrow} \quad h_{\text{mín}} = \sqrt{\frac{M_E \cdot 6}{40{,}77 \cdot 20}} \quad \Rightarrow \quad h_{\text{mín}} = 1{,}49 \text{ cm}$$

b) Determinación de la distancia *a* óptima.

Óptimo resistente:

$$|M_{\text{máx}\,-}| = |M_{\text{máx}\,+}|$$

$$\Downarrow$$

$$|M_B| = |M_E|$$

$$\Downarrow$$

$$p\frac{a^2}{2} = p\frac{\ell^2}{8} - p\frac{a \cdot \ell}{2}$$

$$a^2 + \ell \cdot a - \frac{\ell^2}{4} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$a = -\frac{\ell}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + \frac{\ell^2}{4}}$$

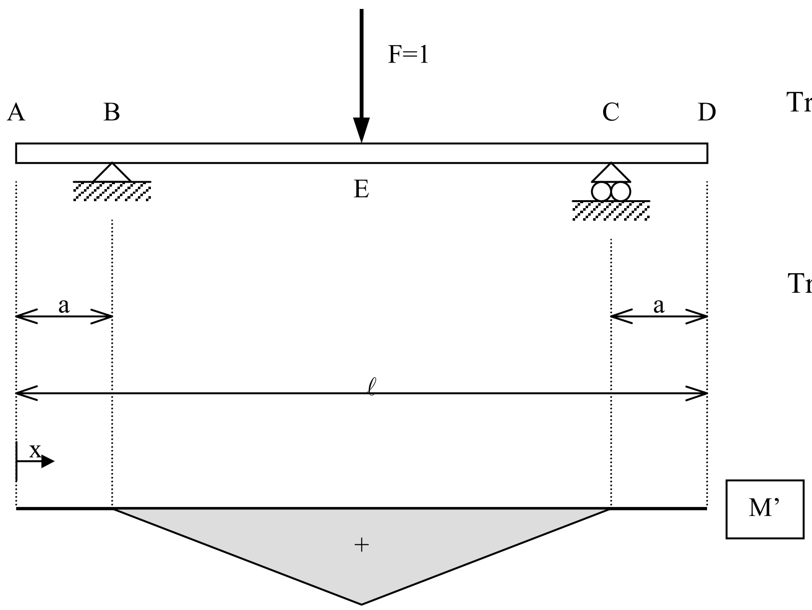
$$a = -\frac{\ell}{2} \pm \sqrt{\frac{2 \cdot \ell^2}{4}} = -\frac{\ell}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\ell \quad \Rightarrow \quad a = \begin{cases} 0{,}207 \cdot \ell \\ (-1{,}207 \cdot \ell) \end{cases}$$

La segunda solución no interesa, porque cae fuera del intervalo analizado

Así pues, la distancia 'a' óptima es: $a_{óptima} = 20{,}7$ cm

Y se tiene, un momento máximo: $M_{\text{máx}} = 128{,}7$ cmKg

c) Cálculo de la flecha en el punto central, por el método de la fuerza unitaria.



Tramo BE:

$$M' = \frac{1}{2} \cdot (x - a)$$

Tramo EC:

$$M' = \frac{1}{2} \cdot (x - a) - 1 \cdot \left(x - \frac{\ell}{a}\right)$$

$$\delta = \frac{\partial W}{\partial F} = \int \frac{M}{EI} M' \cdot dx = \left[\frac{1}{EI}\int_o^a - p\frac{x^2}{a} \cdot 0\, dx + \frac{1}{EI}\int_a^{\frac{\ell}{2}} \left(-p\frac{x^2}{2} + p\frac{\ell}{2}(x-a)\frac{1}{2}(x-a)\right) \cdot dx\right] \cdot 2$$

$$\delta = \frac{2}{2EI}\int_a^{\frac{\ell}{2}} \left(-p\frac{x^3}{2} + p\frac{\ell}{2}x^2 - p\frac{\ell \cdot a}{2}x + p\frac{a}{2}x^2 - p\frac{a \cdot \ell \cdot x}{2} + p\frac{a^2 \cdot \ell}{2}\right) \cdot dx$$

$$\delta = \frac{P}{EI}\left[-\frac{x^4}{8} + \frac{\ell \cdot x^3}{6} - \frac{\ell \cdot a \cdot x^2}{4} + \frac{a \cdot x^3}{6} - \frac{a \cdot \ell \cdot x^2}{4} + \frac{a^2 \cdot \ell \cdot x}{2} \right]_a^{\frac{\ell}{2}}$$

$$\delta = \frac{0{,}6}{EI}(-781{,}25 + 2083 - 937{,}5 + 312{,}5 - 937{,}5 + 562{,}5 + 6{,}328$$

$$-56{,}25 + 84{,}375 - 8{,}437 + 84{,}375 - 168{,}75) \cdot 10^3 = \frac{0{,}6 \cdot 24724}{100\,000 \cdot 5{,}513} = 0{,}265 \quad \text{cm}$$

$$\left(I = \frac{bh^3}{12} = \frac{20 \cdot 1{,}49^3}{12} = 5{,}513 \quad \text{cm}^4 \right)$$