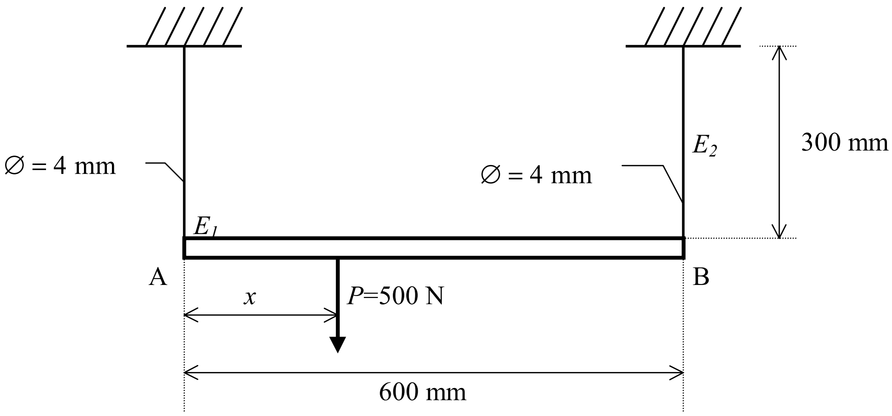
2 Esfuerzo normal

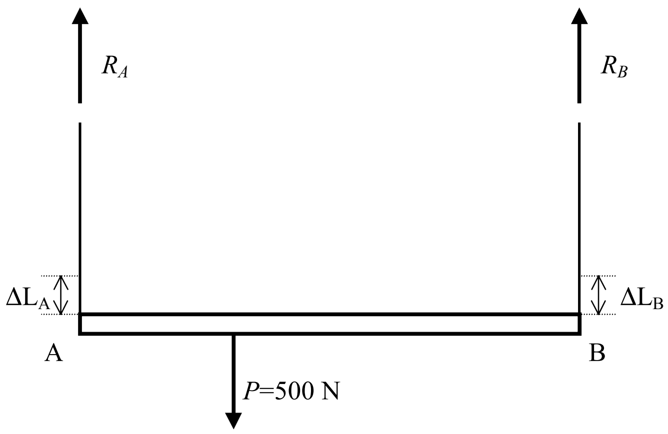
Problema 2.1

Tenemos una barra rígida que está suspendida por dos cables de igual diámetro $\varnothing = 4$ mm, y cuyos módulos de elasticidad son: E_1=2.1·10^5 MPa y E_2=0.7·10^5 MPa. La longitud de la barra es de 600 mm y la de los cables 300 mm. Se considera despreciable el peso propio de la barra. Dicha barra está sometida a una carga puntual P=500 N.
Calcular la posición x de la fuerza para que los puntos A y B tengan el mismo descenso.



Resolución:

Dibujamos el diagrama de sólido libre y obligamos el equilibrio. Además imponemos la igualdad de deformaciones.



$$\sum F_V = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A + R_B = P$$
$$\sum M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A \cdot L - P(L-x) = 0$$

$$\Delta L_A = \Delta L_B$$

Ley de Hooke:

$$\frac{R_A \cdot L_A}{S \cdot E_1} = \frac{R_B \cdot L_B}{S \cdot E_2} \quad \Rightarrow \quad R_A = \frac{R_B \cdot E_1}{E_2} = \frac{R_B \cdot 210000}{70000} \quad \Rightarrow \quad R_A = 3R_B$$

$$3R_B + R_B = 500 \quad \Rightarrow \quad R_B = \frac{500}{4} = 125\ \mathrm{N} \quad \Rightarrow \quad R_A = 375\ \mathrm{N}$$

De la ecuación de los momentos obtenemos x:

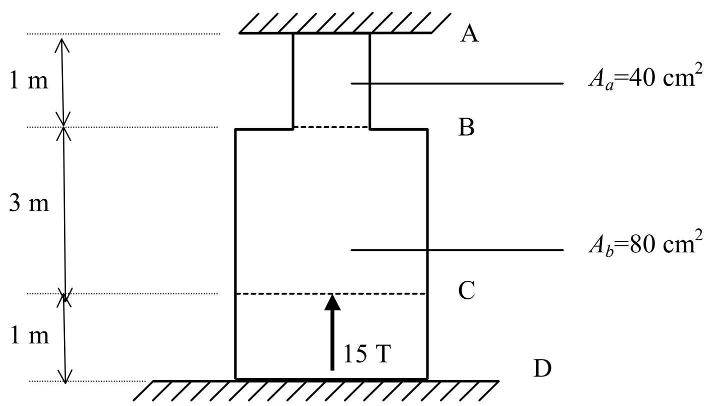
$$R_A \cdot L - P(L - x) = 0$$

$$375 \cdot 600 - 500(600 - x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 150\ \mathrm{mm}$$

Problema 2.2

En la barra esquematizada en la figura adjunta los extremos A y D están empotrados. Determinar las tensiones en ambas secciones, cuyas superficies son: A_a=40 cm^2 y A_b=80 cm^2 .
Hallar también el diagrama de esfuerzos axiles.

Datos: E=2·10^5 MPa.



Resolución:

$$\sum F_V = 0$$

$$R_A + R_D = 15 \text{ T} = 150000 \text{ N}$$

Ecuación de deformación

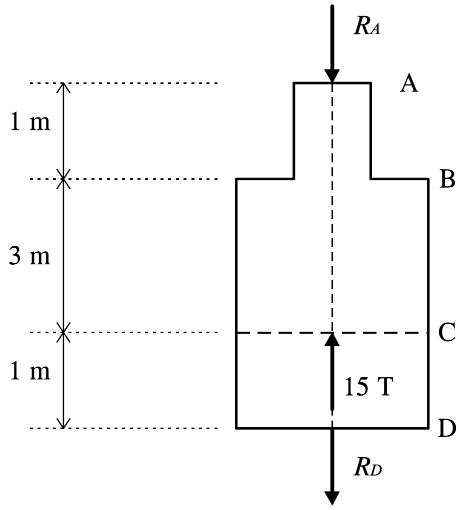
El tramo AC está comprimido, por tanto R_A es un esfuerzo de compresión, y el tramo CD está traccionado, por lo que R_D es un esfuerzo de tracción.

Al estar los dos extremos , A y D, empotrados la variación total de longitud es 0; y el acortamiento del tramo superior es igual al alargamiento del tramo inferior:

$$\Delta L_{AB} + \Delta L_{BC} = \Delta L_{CD}$$

Aplicando la ley de Hooke: $\Delta L = \dfrac{F \cdot L}{A \cdot E}$

$$\frac{R_A \cdot L_{AB}}{E \cdot A_a} + \frac{R_A \cdot L_{BC}}{E \cdot A_b} = \frac{R_D \cdot L_{CD}}{E \cdot A_b}$$



$$\frac{R_A \cdot 1000}{2 \cdot 10^5 \cdot 40 \cdot 10^2} + \frac{R_A \cdot 3000}{2 \cdot 10^5 \cdot 80 \cdot 10^2} = \frac{R_D \cdot 1000}{2 \cdot 10^5 \cdot 80 \cdot 10^2}$$

$$R_A \cdot 2000 + R_A \cdot 3000 = R_D \cdot 1000$$

Resolviendo las ecuaciones, tenemos

$$R_A = 25000 \text{ N} = 2.5 \text{ T}$$

$$R_B = 125000 \text{ N} = 12.5 \text{ T}$$

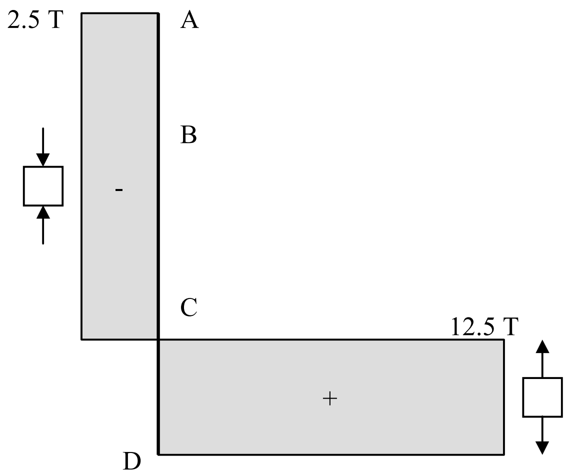
Cálculo de las tensiones.

Tramo AB: $\sigma_{AB} = \dfrac{25000 \text{ N}}{40 \cdot 10^2 \text{ mm}^2} = 6.25 \text{ MPa}$ (COMP.)

Tramo BC: $\sigma_{BC} = \dfrac{25000 \text{ N}}{80 \cdot 10^2 \text{ mm}^2} = 3.125 \text{ MPa}$ (COMP.)

Tramo CD: $\sigma_{CD} = \dfrac{125000 \text{ N}}{80 \cdot 10^2 \text{ mm}^2} = 15.625 \text{ MPa}$ (TRAC.)

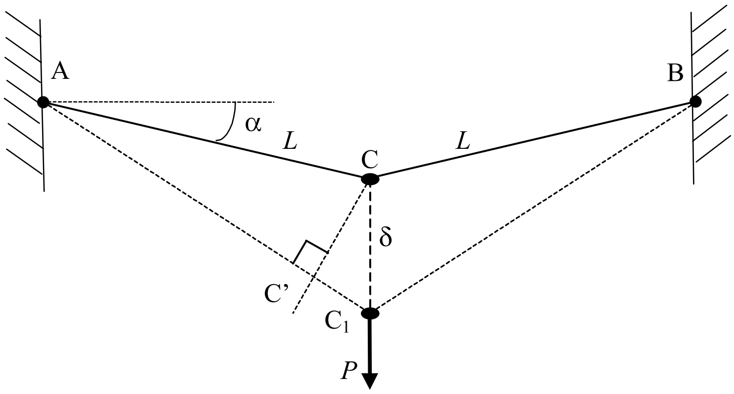
Diagrama de esfuerzos normales:



Problema 2.3

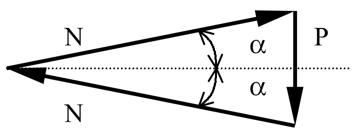
a) Las dos barras de la figura articuladas en sus extremos, de acero, de 2 cm de diámetro y de 3.5 m de longitud, soportan un peso P=5 KN. Calcular el descenso δ del punto C, siendo α=20º. Datos: E=2,1·10^5 MPa.

b) Resolver para α=0º.



Resolución:

a) Para α=20º:



Equilibrio del punto C

Del equilibrio del punto C se obtiene

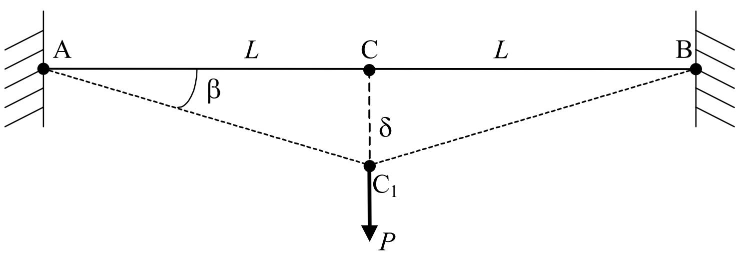
$$N \operatorname{sen}\alpha = \frac{P}{2}$$

$$N = \frac{P}{2\operatorname{sen}\alpha}$$

Sea δ ($\overline{CC_1}$) el descenso del punto C, entonces el alargamiento de la barra $\overline{AC}$, ΔL, será $\overline{C'C_1}$ pudiendo considerarse el triángulo $CC'C_1$ rectángulo en C'. Aquí es $\delta = \dfrac{\Delta L}{\operatorname{sen}\alpha}$. Como por otra parte: $\Delta L = \dfrac{NL}{EA}$, se tiene que:

$$\delta = \frac{NL}{EA\operatorname{sen}\alpha} = \frac{PL}{2EA\operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{5000 \cdot 3500}{2 \cdot 2.1 \cdot 10^5 \cdot 3{,}14 \cdot 10^2 \cdot 0.34202^2} = 1{,}13\ \text{mm}$$

b) Para α=0º:



De acuerdo con la estática de los sistemas rígidos, descomponiendo la fuerza *P* en las direcciones de las barras, se encontrarían, para los esfuerzos en las barras y para las reacciones, valores infinitamente grandes. La solución evidentemente es inaceptable, ya que ni las barras ni los apoyos resistirían.

A fin de hacer desaparecer la aparente imposibilidad basta con considerar los alargamientos de las barras que toman direcciones no alineadas. Esto demuestra la necesidad de tener en cuenta las deformaciones en este caso.

Poniendo

$$\frac{\delta}{L} = \operatorname{tg}\beta \cong \beta \quad \text{(para ángulos pequeños)}$$

el alargamiento de las barras vale

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{AC_1} - \mathrm{AC}}{\mathrm{AC}} = \frac{\sqrt{L^2 + \delta^2} - L}{L} = \sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{L}\right)^2} - 1 = \sqrt{1 + \beta^2} - 1 \cong \frac{\beta^2}{2}$$

Esta última igualdad proviene de la expresión:

$$\sqrt{1 \pm a} = (1 \pm a)^{1/2} = 1 \pm \frac{1}{2}a - \frac{1}{8}a^2 \pm \frac{1}{16}a^3 - \frac{5}{128}a^4 \pm \ldots$$

Para $a \ll 1$, pueden despreciarse las potencias de *a* y, por tanto, queda $\sqrt{1 \pm a} = 1 \pm \frac{a}{2}$.

El esfuerzo normal en una de las barras es:

$$N = \sigma \cdot A = E \cdot \varepsilon \cdot A = \frac{E \cdot A \cdot \beta^2}{2}$$

Por otra parte, del equilibrio del punto C se deduce

$$N \cdot \operatorname{sen}\beta \approx N \cdot \beta = \frac{P}{2} \quad \Rightarrow \quad N = \frac{P}{2\beta} \quad \Rightarrow \quad \frac{E \cdot A \cdot \beta^2}{2} = \frac{P}{2\beta}$$

Resulta

$$\beta = \sqrt[3]{\frac{P}{E \cdot A}}$$

$$\delta = \beta \cdot L = L \cdot \sqrt[3]{\frac{P}{E \cdot A}}$$

Aplicando los datos numéricos del problema:

$$\delta = 3500 \cdot \sqrt[3]{\frac{5000}{2.1 \cdot 10^5 \cdot 3{,}14 \cdot 10^2}} = 148 \text{ mm}$$

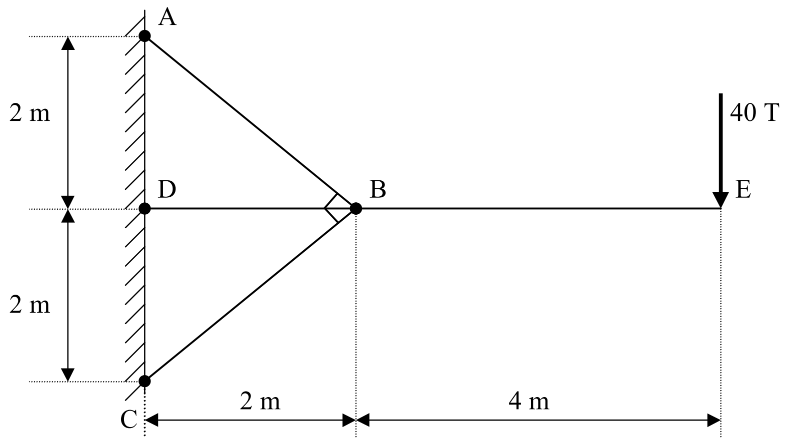
$$\beta \approx \frac{\delta}{L} = \frac{148}{3500} = 0{,}04229 \text{ rad} = 2{,}42^{\circ}$$

$$N = \frac{P}{2\beta} = \frac{5000}{2 \cdot 0{,}04229} = 59116 \text{ N}$$

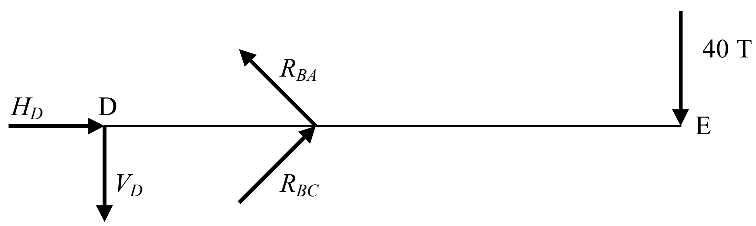
$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{59116}{314} = 188 \text{ N/mm}^2$$

Problema 2.4

Hallar las reacciones del sistema y las tensiones en las barras articuladas AB y CB de la estructura representada en la figura, suponiendo infinitamente rígida la barra horizontal DE, articulada en D.
Barra AB: sección 40 cm^2
Barra CB: sección 80 cm^2
Se considera el mismo módulo de elasticidad, para todas las barras.



Resolución:
Se trata de un sistema hiperestático.
R_{BA} y R_{BC} siguen la dirección de la barra.

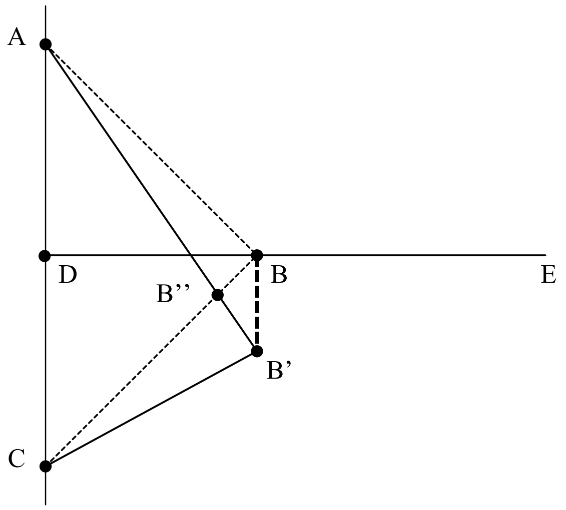


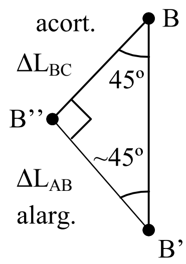
Ecuaciones de la estática:

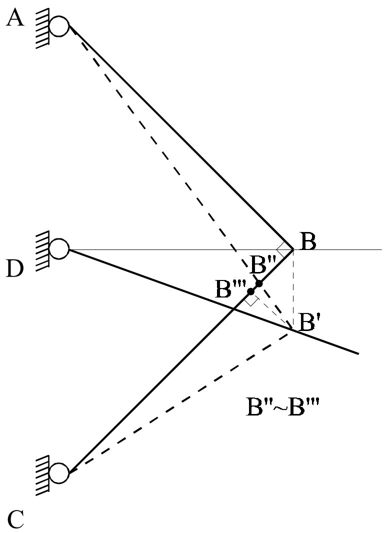
$$\sum F_V = 0 \quad \rightarrow \quad -V_D + R_{BA}\frac{\sqrt{2}}{2} + R_{BC}\frac{\sqrt{2}}{2} - 40 = 0$$

$$\sum F_H = 0 \quad \rightarrow \quad H_D + R_{BC}\frac{\sqrt{2}}{2} - R_{BA}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\sum M_B = 0 \quad \rightarrow \quad V_D \cdot 2 = 40 \cdot 4 \Rightarrow V_D = 80\,\mathrm{T}$$







$$\Delta L_{AB} = B'B'' \qquad \Delta L_{CB} = BB'''$$

Al ser deformaciones y ángulos pequeños:

$$B'B'' \approx BB'''$$

$$\left|\Delta L_{AB}\right| = \left|\Delta L_{BC}\right|$$

Alargamiento barra AB= Acortamiento barra BC

Aplicamos la ley de Hooke:

$$\left|\frac{R_{BA}\cdot 2\sqrt{2}}{E\cdot 40}\right| = \left|\frac{R_{BC}\cdot 2\sqrt{2}}{E\cdot 80}\right| \Rightarrow 2R_{BA} = R_{BC}$$

De la ecuación $\Sigma F_v = 0$ tenemos:

$$-80 + R_{BA}\frac{\sqrt{2}}{2} + 2R_{BA}\frac{\sqrt{2}}{2} - 40 = 0$$

con lo que,

$$R_{BA} = 56.73\,\mathrm{T} \qquad R_{BC} = 113.47\,\mathrm{T}$$

De la otra ecuación despejamos: H_D= - 40 T (sentido contrario al supuesto)

Cálculo de las tensiones:

$$\sigma_{AB} = \frac{56730}{40} = 1418\,\frac{\mathrm{Kp}}{\mathrm{cm}^2}$$

$$\sigma_{AB} = \frac{113470}{80} = 1418\,\frac{\mathrm{Kp}}{\mathrm{cm}^2}$$