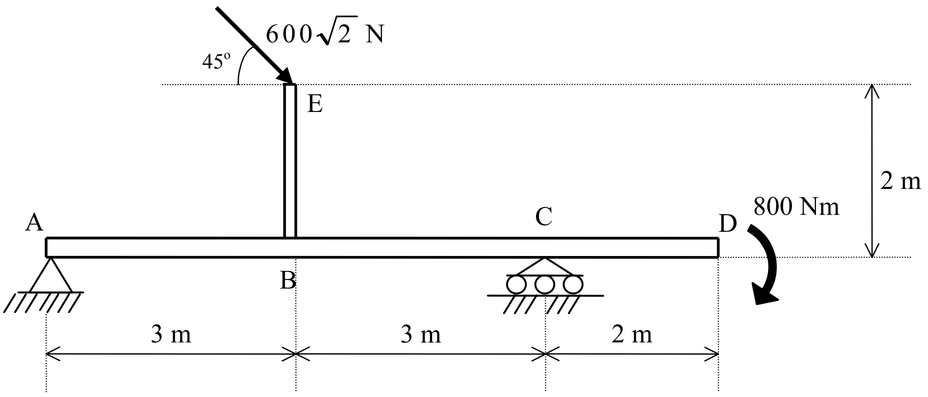
1 Diagramas de esfuerzos

Problema 1.1

Determinar los diagramas de esfuerzos en la estructura de la figura.



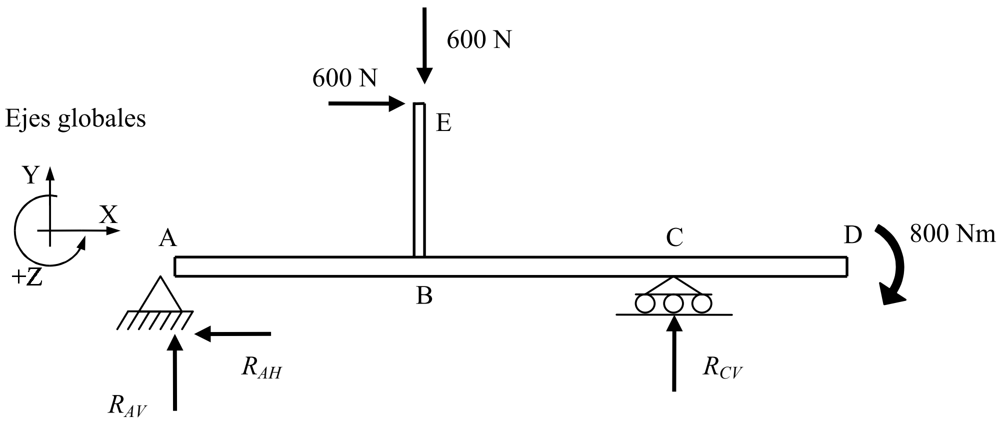
$$F_H = 600\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 600 \text{ N}$$

$$F_V = 600\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 600 \text{ N}$$

Resolución:

a) Descomposición de la fuerza exterior aplicada en el extremo de la barra BE.

b) Cálculo de las reacciones.



Tomamos momentos respecto al punto C:

$$\sum M_c = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{AV} \cdot 6 - 600 \cdot 3 + 600 \cdot 2 + 800 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{AV} = -\frac{100}{3} \text{ N} = -33{,}\widehat{3} \text{ N}$$

Suma de fuerzas verticales y horizontales:

$$\sum F_V = 0 \quad \Rightarrow R_{AV} - 600 + R_{CV} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{100}{3} + 600 = R_{CV} = \frac{1900}{3} \text{ N}$$

$$\sum F_H = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{AH} = 600 \text{ N}$$

c) Cálculo de momentos en los tramos AB y BC.

TramoAB: $M(x) = R_{AV} \cdot x = -\frac{100}{3} \cdot x$ $M_A = 0$ $M_B = -100$ Nm

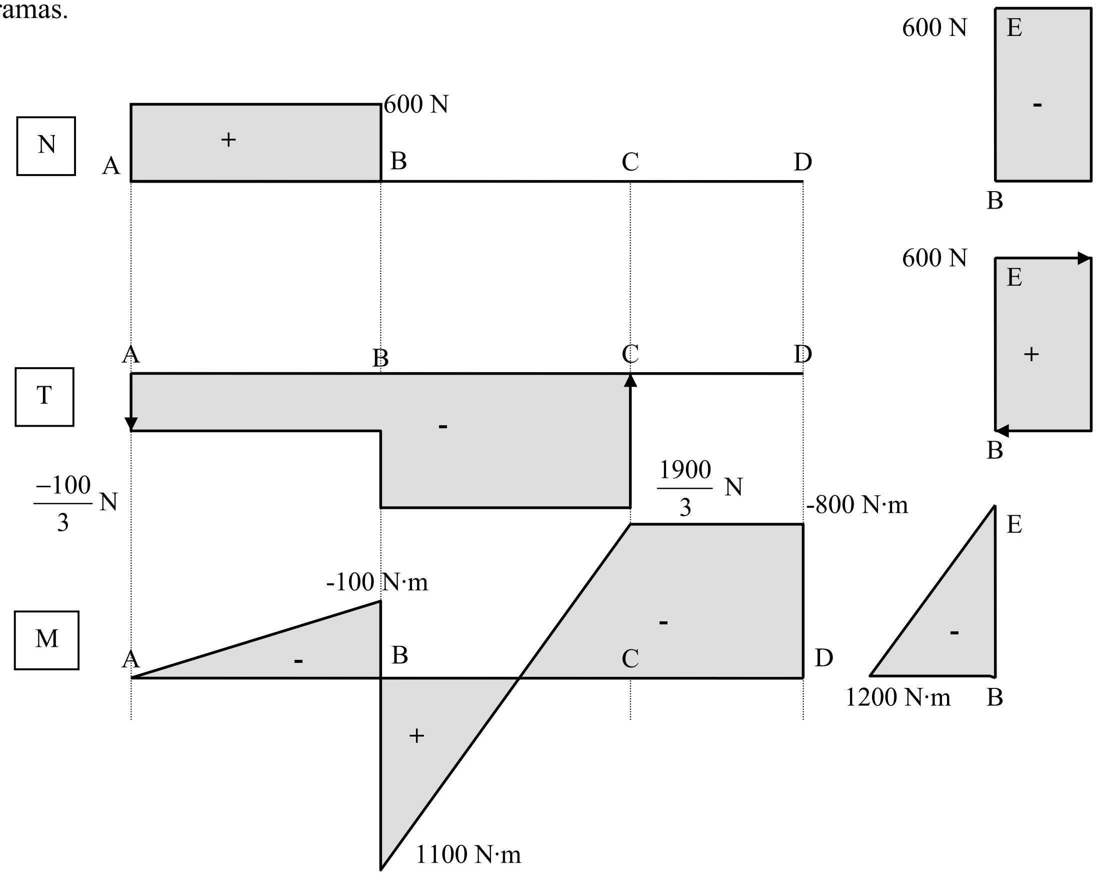
Tramo BC:

$$M(x) = R_{AV} \cdot x - 600(x-3) + 600 \cdot 2$$

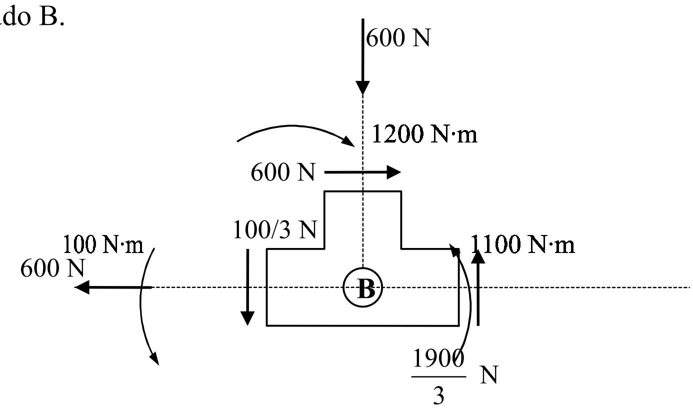
$$M_B = -\frac{100}{3} \cdot 3 - 0 + 1200 = 1100 \text{ Nm}$$

$$M_C = -\frac{100}{3} \cdot 6 - 600 \cdot 3 + 600 \cdot 2 = -800 \text{ Nm}$$

Diagramas.

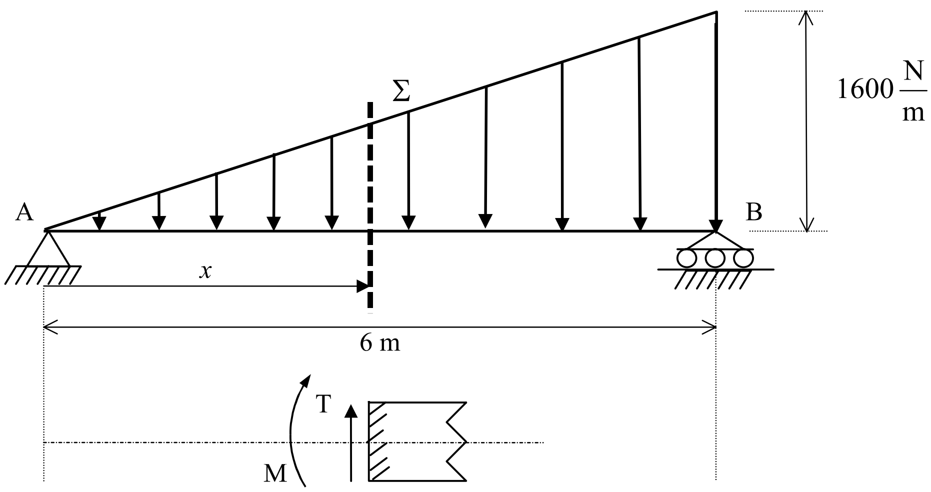


Equilibrio del nudo B.



Problema 1.2

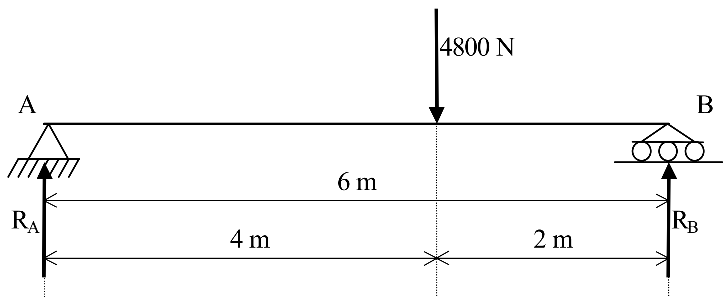
Determinar los diagramas de esfuerzos en la viga de la figura, apoyada en los extremos y sometida a una carga repartida triangular.



Resolución:

a) Cálculo de la reacciones.

Resultante de la carga $Q = \dfrac{1600 \cdot 6}{2} = 4800\ \text{N}$.

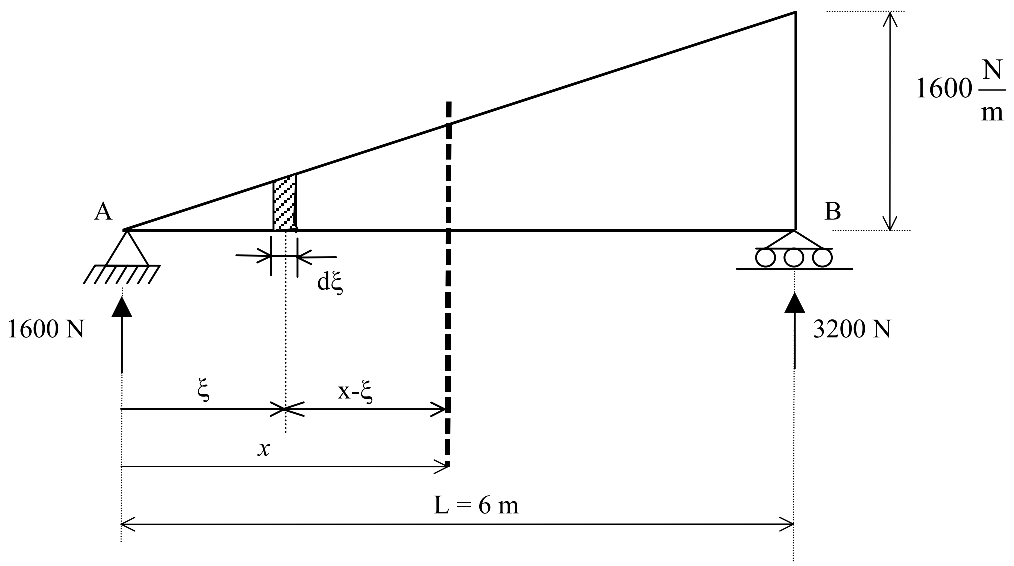


$$R_A + R_B = 4800$$

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad R_B \cdot 6 = 4800 \cdot 4$$

$$R_B = \frac{4800 \cdot 4}{6} = 3200\ \text{N}$$
$$R_A = 1600\ \text{N}$$

b) Cálculo de los esfuerzos de sección.



Sección situada a una distancia x del apoyo A:

T:

$$T = 1600 - \int_0^x q\, d\xi = 1600 - \int_0^x \frac{1600}{6}\xi\, d\xi$$

$$T = 1600 - \left[\frac{1600}{6}\cdot\frac{\xi^2}{2}\right]_0^x = 1600 - \frac{1600}{12}\,x^2$$

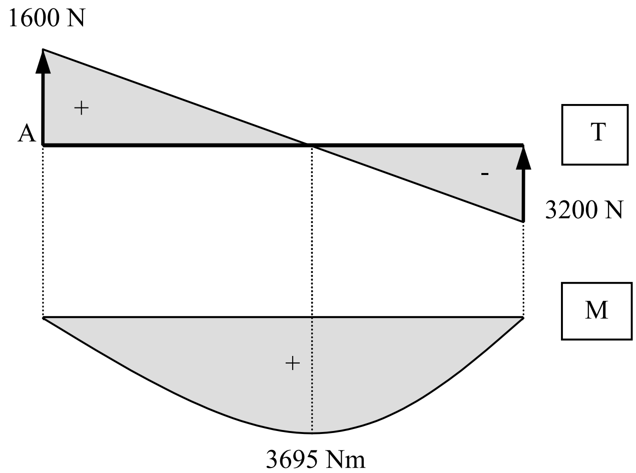
M:

$$M = 1600\,x - \int_0^x q\cdot(x-\xi)\,d\xi = 1600\,x - \int_0^x \frac{1600}{6}\xi\cdot(x-\xi)\,d\xi$$

$$M = 1600\,x - \left[\frac{1600}{6}\cdot\left(\frac{\xi^2}{2}x - \frac{\xi^3}{3}\right)\right]_0^x$$

$$M = 1600\,x - \left(\frac{1600}{6}\cdot\left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\right) = 1600\,x - \frac{1600}{6}\cdot\frac{x^3}{6}$$

c) Diagramas.



d) Punto de $M_{máx}$

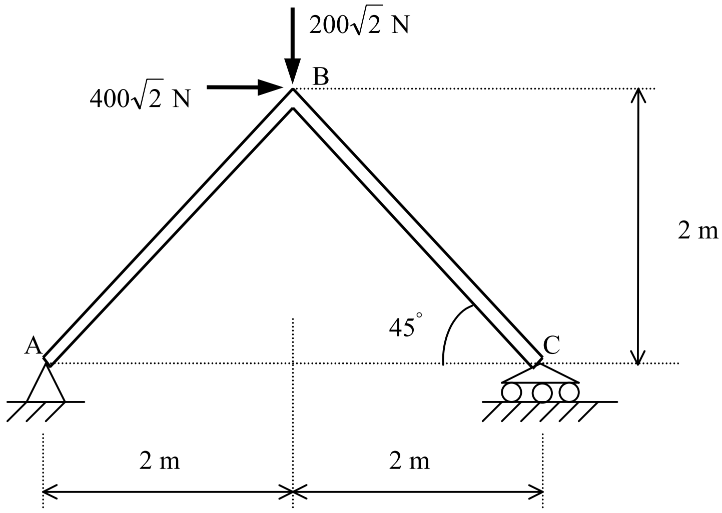
$$\frac{\partial M}{\partial x} = T \quad \Rightarrow T = 0$$

$$T = 0 = 1600 - \frac{1600}{12} x^2 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{12} = 3{,}46 \text{ m}$$

$$M_{\text{máx}} = 1600 \cdot 3{,}46 - \frac{1600}{12} \cdot 3{,}46^2 = 3695 \text{ Nm}$$

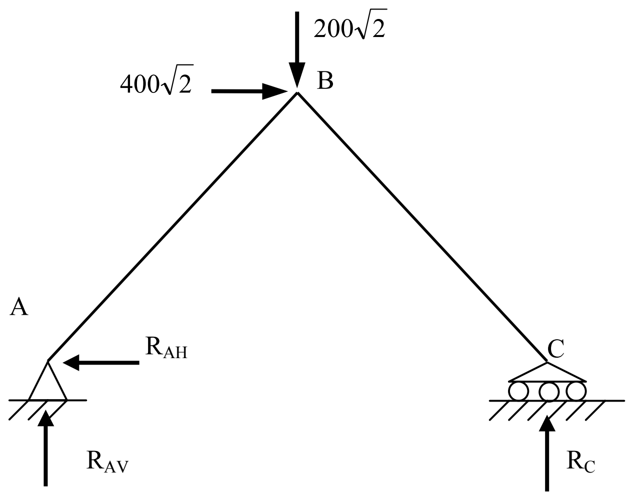
Problema 1.3

Determinar los diagramas de esfuerzos del pórtico inclinado de la figura.



Resolución:

Para el cálculo de las reacciones, planteamos las ecuaciones de la estática.



$$\sum F_V = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{AV} + R_C - 200\sqrt{2} = 0$$
$$\sum F_H = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{AH} = 400\sqrt{2} \text{ N}$$
$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad R_C \cdot 4 - 400\sqrt{2} \cdot 2 - 200\sqrt{2} \cdot 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_C = 300\sqrt{2} \text{ N}$$

por tanto, $R_{AV} = -100\sqrt{2}\ N$ y descomponiendo cada reacción en las direcciones de las barras,

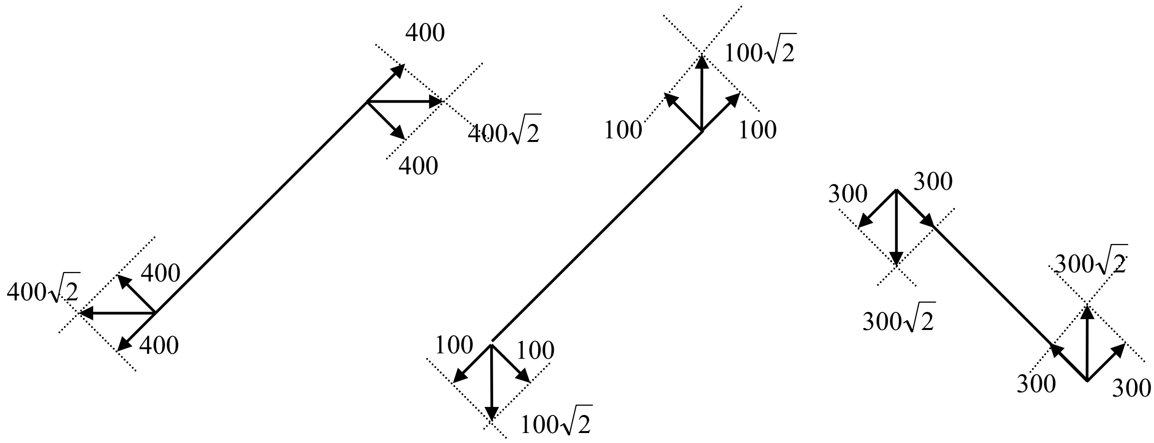


Diagrama $\boxed{\text{N}}$

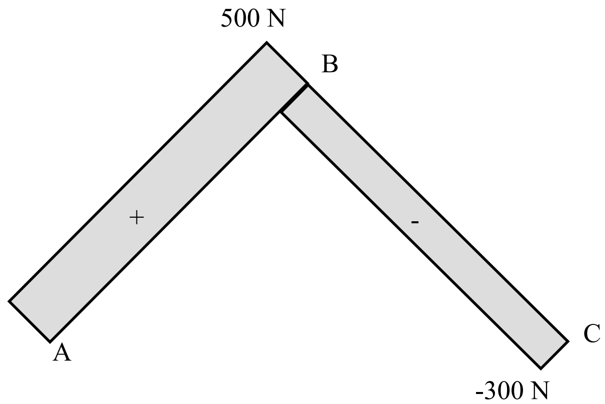


Diagrama $\boxed{\text{T}}$

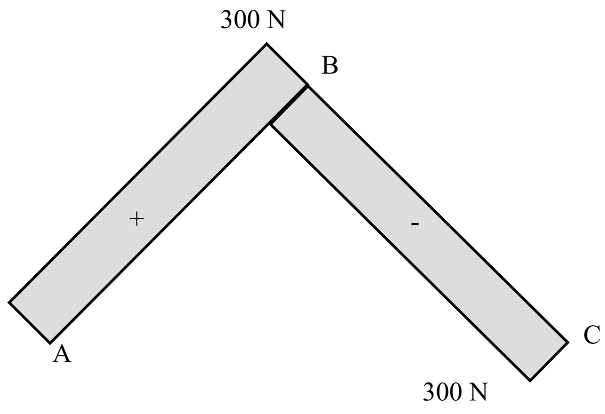
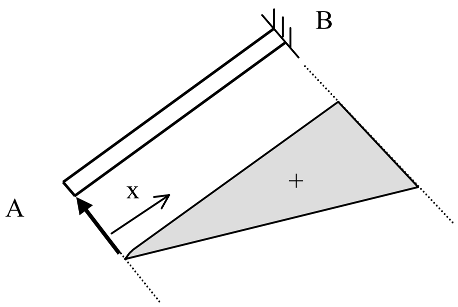
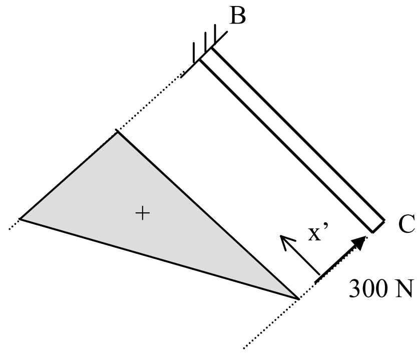


Diagrama $\boxed{\text{M}}$



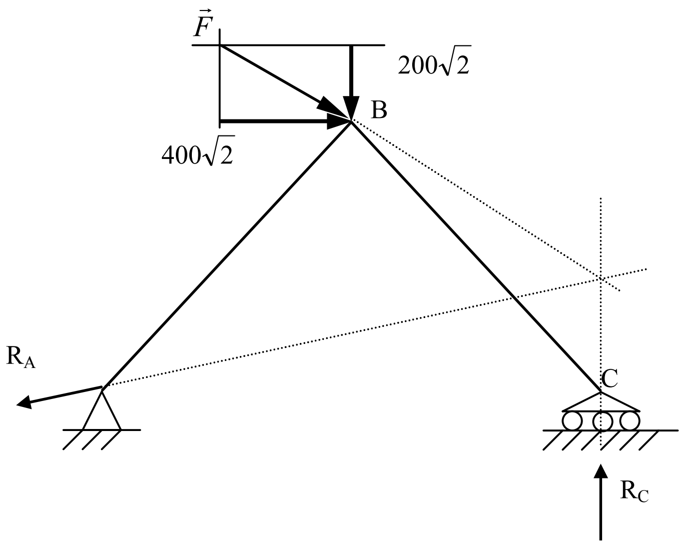


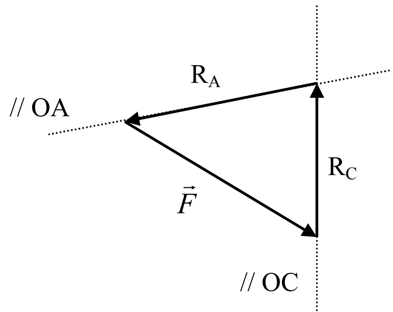
$$M = 300 \cdot x \qquad \begin{aligned} M_A &= 0 \\ M_B &= 600\sqrt{2}\ \text{Nm} \end{aligned}$$

$$M = 300 \cdot x' \qquad \begin{aligned} M_C &= 0 \\ M_B &= 600\sqrt{2}\ \text{Nm} \end{aligned}$$

Método alternativo para hallar las reacciones: resolución gráfica.

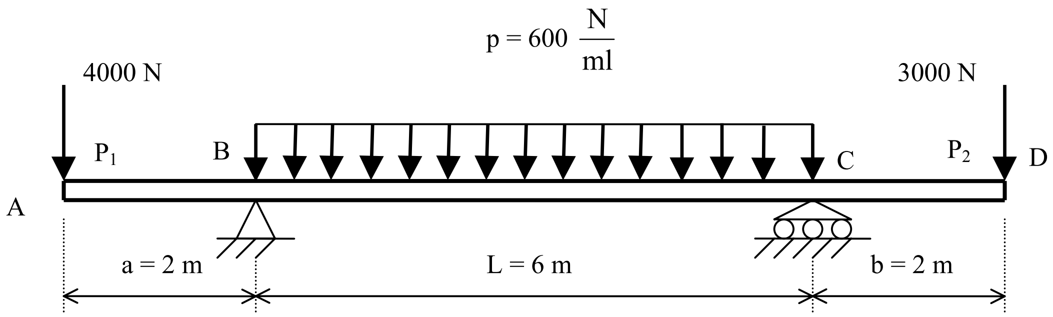
Para que las tres fuerzas estén en equilibrio, sus líneas de acción deben cruzarse en punto O (ya que $\sum M_0 = 0$). A partir de la línea de acción vertical de R_C, se obtiene O.





Problema 1.4

Determinar los diagramas de esfuerzos en la viga de la figura.



Resolución:

Cálculo de las reacciones:

$$\sum F_V : \quad R_B + R_C - 4000 - 600 \cdot 6 - 3000 = 0$$

$$\sum M_B : \quad 4000 \cdot 2 - 600 \cdot 6 \cdot 3 + R_C \cdot 6 - 3000 \cdot 8 \quad \Rightarrow \quad R_C = 4467 \text{ N}$$
$$R_B = 6133 \text{ N}$$

Diagrama de momentos flectores:

Tramo AB:

$$M = -4000 \cdot x$$
$$M_A = 0 \qquad M_B = -8000 \text{ Nm}$$

Tramo BC:

$$M = -4000 \cdot x + 6133 \cdot (x-2) - 600 \cdot \frac{(x-2)^2}{2}$$
$$M_B = -8000 \text{ Nm} \qquad M_C = -6000 \text{ Nm}$$

Tramo CD:

$$M = -4000 \cdot x + 6133 \cdot (x-2) - 600 \cdot 6 \cdot (x-5) + 4467 \cdot (x-8)$$
$$M_C = -6000 \text{ Nm} \qquad M_D = 0$$

Diagrama de esfuerzos cortantes.

Tramo AB:

$$T = -4000 \text{ N}$$
$$T_A = -4000 \text{ N} \qquad T_B = -4000 \text{ N}$$

Tramo BC:

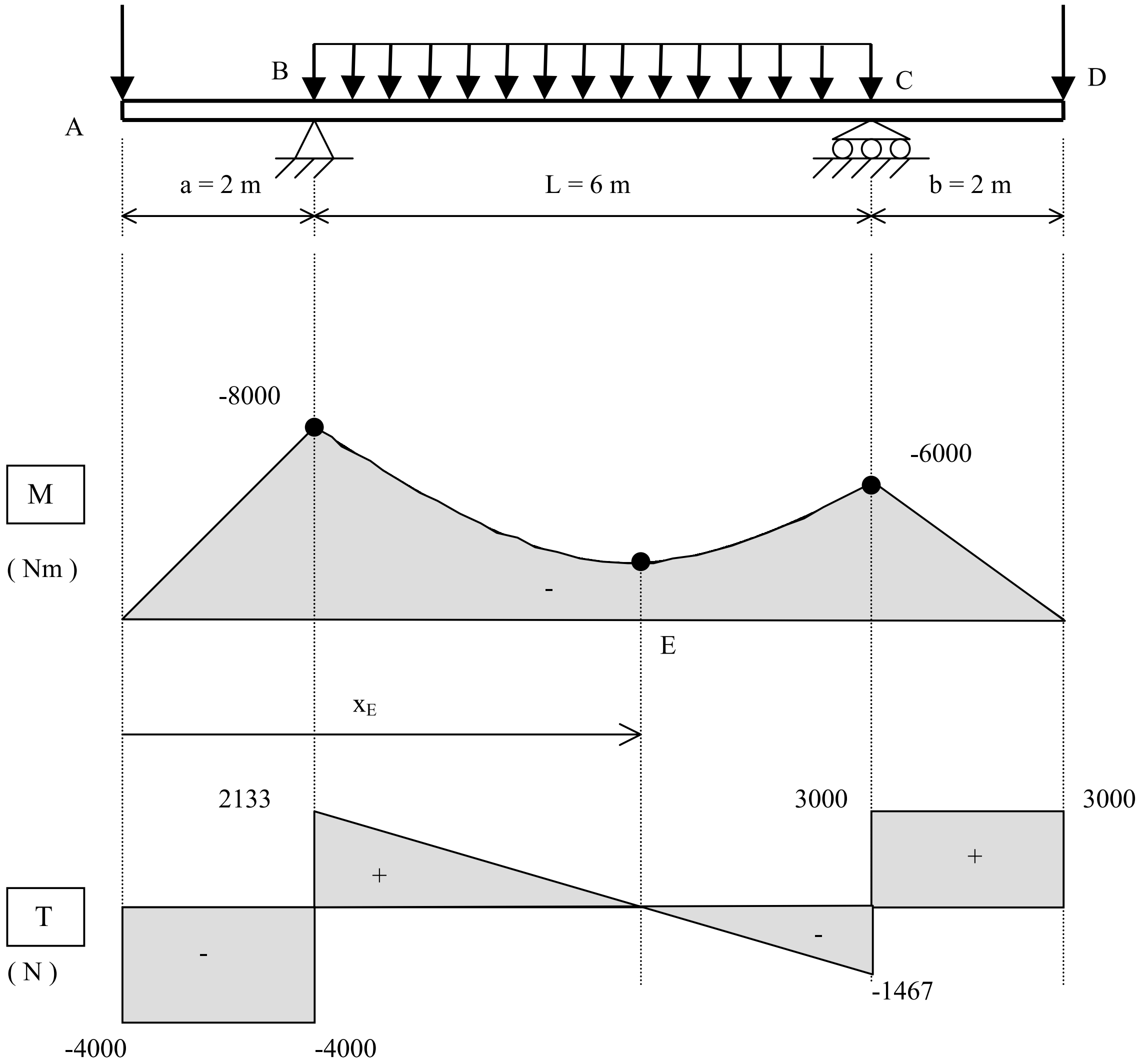
$$T = -4000x + 6133 - 600 \cdot (x - 2)$$

$$T_B = 2133 \text{ N} \qquad T_C = -1467 \text{ N}$$

Tramo CD:

$$T = -4000 + 6133 - 3600 + 4467$$

$$T_C = 3000 \text{ N} \qquad T_D = 3000 \text{ N}$$



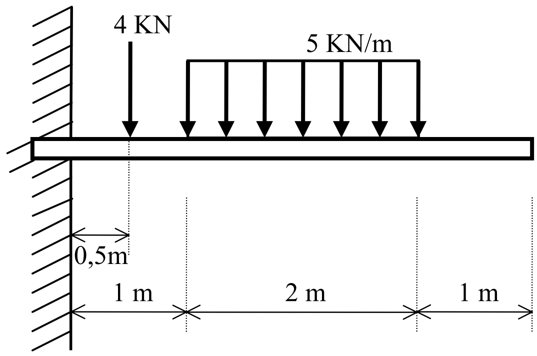
El diagrama de momentos flectores pasa por un mínimo relativo en el punto E, donde la tangente es horizontal, o sea:

$$\frac{\partial M}{\partial x} = T = 0 \quad : \quad -4000 + 6133 - 600 \cdot (x_E - 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_E = 5{,}35 \text{ m}$$

M_E = -4208 Nm

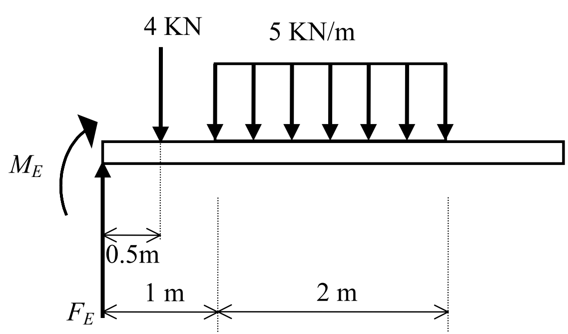
Problema 1.5

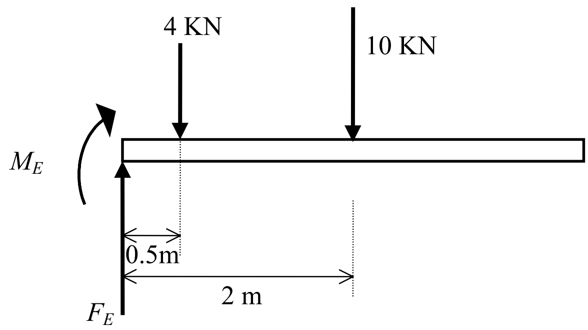
En la viga en voladizo de la figura, calcular las reacciones en el empotramiento y dibujar los diagramas de esfuerzos cortantes y de momentos flectores en toda la viga.



Resolución:

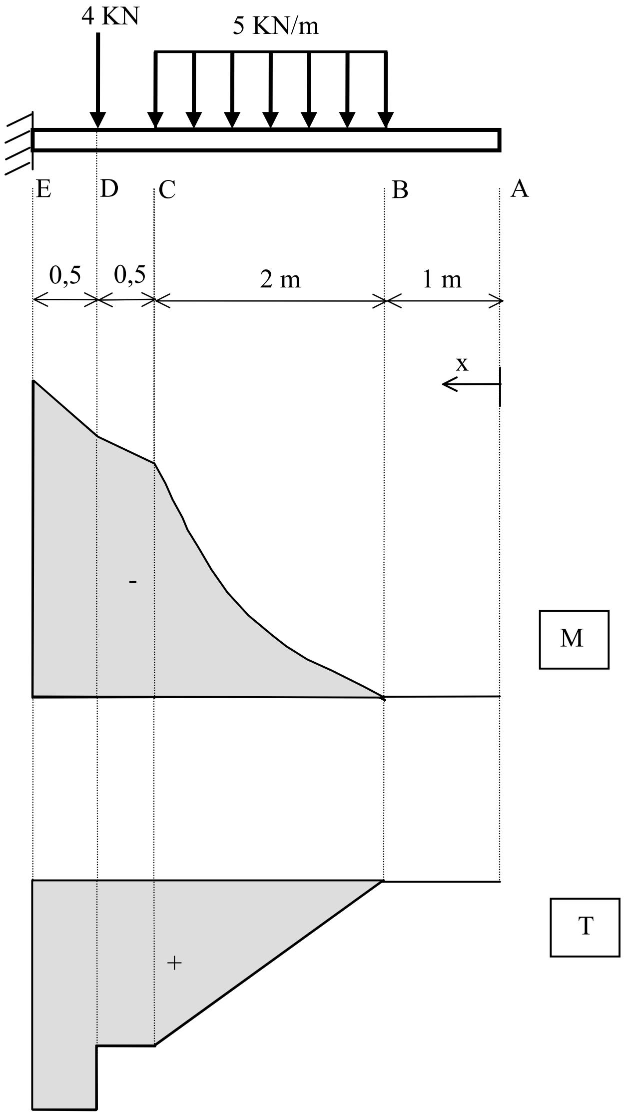
a) Reacciones en el empotramiento.
Comenzaremos por buscar el sistema de fuerzas que ejerce el empotramiento, dibujamos el diagrama de sólido libre y obligamos al equilibrio. Sumando fuerzas y tomando momentos obtenemos:





$$\left.\begin{aligned} F_E &= 14\ \text{KN} \\ M_E &= -4\cdot 0{,}5 - 10\cdot 2 = -22\ \text{KN}\cdot\text{m} \end{aligned}\right\}$$ Reacciones que ejerce el empotramiento sobre la viga.

b) Diagramas



Tramo AB: M = 0 T = 0

Tramo BC:

$$M = -5 \cdot \frac{(x-1)^2}{2} \ (\mathrm{KN \cdot m}) \qquad M_B = 0$$

$$M_C = 0$$

$$T = -5 \cdot (x-1)^2 \ (\mathrm{KN}) \qquad T_B = 0$$

$$T_C = -10 \ \mathrm{KN}$$

Tramo CD:

$$M = -10 \cdot (x-2) \ (\mathrm{KN \cdot m}) \qquad M_C = -10 \ \mathrm{KN \cdot m}$$
$$M_D = -15 \ \mathrm{KN \cdot m}$$

$$T = -10 \ (\mathrm{KN}) \qquad T_C = -10 \ \mathrm{KN}$$
$$T_D = -10 \ \mathrm{KN}$$

Tramo DE:

$$M = -10 \cdot (x-2) - 4 \cdot (x-3{,}5) \ (\mathrm{KN \cdot m}) \qquad M_D = -15 \ \mathrm{KN \cdot m}$$
$$M_E = -22 \ \mathrm{KN \cdot m}$$

$$T = -10 - 4 = -14 \ (\mathrm{KN}) \qquad T_D = -14 \ \mathrm{KN}$$
$$T_E = -14 \ \mathrm{KN}$$

Estos diagramas se han obtenido tomando el origen de las x en el extremo A, de la derecha, porque en este caso, es más cómodo. Si se determinan los diagramas tomando el origen de las x en el extremo de la izquierda E, tal como se hace habitualmente, el diagrama de momentos flectores, M, sale idéntico; pero el diagrama de esfuerzos cortantes sale opuesto (igual, pero de signo cambiado).