DINAMICA DE MECANISMOS DE UN GRADO DE LIBERTAD

La energía cinética de cuerpo rígido puede separarse en dos términos, uno que depende de la velocidad del centro de masa y el otro que depende de la velocidad angular del cuerpo. Para un mecanismo con varios cuerpos, la energía cinética total será la suma de las energías individuales. Así, la energía cinética se puede escribir como:

$$\text{EC} = \sum_{i=1}^{n} \left(0.5 m_i \{V_i\}^T \{V_i\} + 0.5 \{\omega_i\}^T [I_i] \{\omega_i\} \right)$$

Donde $\{V_i\}$ representa la velocidad del centro de masa del cuerpo i, y $\{\omega_i\}$ representa la velocidad angular del cuerpo i, ambas medidas en coordenadas de un sistema inercial.

Si se definen los siguientes vectores columnas como:

$$\{V_G\} = Col(V_{G1x}, V_{G1y}, V_{G1z}, V_{G2x}, V_{G2y}, V_{G2z}, ..., V_{Gnz})$$
$$\{\omega\} = Col(\omega_{1x}, \omega_{1y}, \omega_{1z}, \omega_{2x}, ..., \omega_{nz})$$

entonces, definiendo apropiadamente una matriz masa $[M]$ y una matriz de inercia $[I_G]$, la energía cinética total del sistema puede expresarse como:

$$\text{EC} = 0.5 \{V_G\}^T [M] \{V_G\} + 0.5 \{\omega\}^T [I_G] \{\omega\}$$

Para un sistema de un solo grado de libertad, los vectores $\{V_G\}$ y $\{\omega\}$ pueden escribirse en términos de la velocidad generalizada, $\dot{q}$, y de un vector de coeficientes de velocidades:

$$\{V_G\} = \dot{q}\{K_G\} \qquad \{\omega\} = \dot{q}\{K_\omega\}$$

Con estas definiciones, la energía cinética total puede escribirse en términos de $\dot{q}$:

$$\text{EC} = 0.5\, \dot{q}^2 \left(\{K_G\}^T [M] \{K_G\} + \{K_\omega\}^T [I_G] \{K_\omega\} \right)$$

Por analogía con la expresión para la energía cinética de una partícula, la expresión anterior se puede poner como:

$$\text{EC} = 0.5\, \Im(q) \dot{q}^2$$

donde $\Im(q) = \{K_G\}^T [M] \{K_G\} + \{K_\omega\}^T [I_G] \{K_\omega\}$

se denomina inercia generalizada, la que es una función de q.

MECANISMOS PLANOS

En el caso de mecanismos planos:

$$\text{EC} = 0.5 \sum_{i=1}^{n} M_i V_{Gi}^2 + 0.5 \sum_{i=1}^{n} I_{Gi} \omega_i^2$$

donde se puede poner que

$$V_{Gi}^2 = V_{Gix}^2 + V_{Giy}^2 = (K_{Gix}^2 + K_{Giy}^2)\dot{q}^2$$

$$\omega_i^2 = K_{\omega i}^2 \dot{q}^2$$

por lo que

$$\text{EC} = 0.5\ \dot{q}^2 (\sum_{i=1}^{n} M_i (K_{Gix}^2 + K_{Giy}^2) + \sum_{i=1}^{n} I_{Gi} K_{\omega i}^2)$$

que se puede poner como

$$\text{EC} = 0.5\ \Im(q)\dot{q}^2$$

donde $$\Im(q) = \sum_{i=1}^{n} M_i (K_{Gix}^2 + K_{Giy}^2) + \sum_{i=1}^{n} I_{Gi} K_{\omega i}^2)$$

FUERZAS GENERALIZADAS

Todas las fuerzas y torques que trabajan sobre el sistema influyen en su respuesta dinámica. Ahora, se determinará una fuerza generalizada que, cuando actúe a través de un cambio virtual de coordenada δq, realice un trabajo virtual Qδq igual a la suma del trabajo virtual de las fuerzas y torques reales moviéndose a través de sus desplazamientos virtuales asociados.

Sean F_i las fuerzas externas aplicadas en ubicaciones definidas por los vectores posición r_i. Análogamente, sean C_j los torques externos actuando en ángulos θ_j. El trabajo virtual será:

$$\delta W = \sum_i F_i \cdot \delta r_i + \sum_j C_j \cdot \delta\theta_j$$

dado que todas las posiciones son funciones de la coordenada generalizada, q, los desplazamientos virtuales pueden ser escritos como:

$$\delta r_i = \frac{dr_i}{dq}\delta q \qquad \delta\theta_j = \frac{d\theta_j}{dq}\delta q$$

por lo que:

$$\delta W = \left(\sum_i F_i \cdot \frac{dr_i}{dq} + \sum_j C_j \cdot \frac{d\theta_j}{dq} \right)\delta q = Q\delta q$$

donde Q es la fuerza generalizada

$$\text{Q} = \left(\sum_i F_i \cdot \frac{dr_i}{dq} + \sum_j C_j \cdot \frac{d\theta_j}{dq} \right)$$

y la potencia de entrada será igual a:

$$\text{Potencia} = \frac{dW}{dt} = Q\dot{q}$$

ECUACION DE EKSERGIAN

Es sabido que el trabajo realizado sobre un sistema mecánico es igual al cambio de energía cinética del sistema. Esto se puede escribir como:

$$\text{Potencia (entrada)} = \frac{d(EnergíaCinética)}{dt}$$

Como $\qquad \mathrm{EC} = 0.5\,\Im(q)\dot{q}^2$

Entonces $\qquad 0.5\dfrac{d\Im}{dq}\dot{q}\dot{q}^2 + \Im\dot{q}\ddot{q} = Q\dot{q}$

Por lo que:

$$\Im\ddot{q} + 0.5\frac{d\Im}{dq}\dot{q}^2 = Q$$

que es la Ecuación de Eksergian para el movimiento de un sistema de un solo grado de libertad.

Si se define $\varsigma(q) = 0.5\dfrac{d\Im}{dq}$, la ecuación anterior se puede poner como:

$$\Im(q)\ddot{q} + \varsigma(q)\dot{q}^2 = Q$$

donde $\varsigma(q)$ se conoce como el coeficiente centrífugo.

ENERGIA POTENCIAL. REPRESENTACION DE FUERZAS CONSERVATIVAS

Supongamos que la fuerza F_i que actúa en el punto r_i esté constituida por dos partes: una parte conservativa y la otra no-conservativa. La fuerza conservativa puede escribirse como el negativo del gradiente de la función potencial asociada:

$$F_i = F_c^c + F_i^{nc} = -\nabla V_i + F_i^{nc}$$

Así, la fuerza generalizada Q resultante también se puede expresar en dos partes:

$$Q = \sum_i F_i \cdot \frac{dr_i}{dq} = \sum_i \left(-\nabla V_i + F_i^{nc}\right)\cdot\frac{dr_i}{dq} = -\sum_i \frac{dV_i}{dq} + \sum_i F_i^{nc}\cdot\frac{dr_i}{dq}$$

$$Q = -\frac{dV}{dq} + Q^{nc}$$

donde V representa la energía potencial total del sistema, en tanto que Q^{nc} es la fuerza generalizada no-conservativa. Así, la ecuación de Eksergian adquiere la siguiente forma:

$$\Im(q)\ddot{q} + \varsigma(q)\dot{q}^2 + \frac{dV}{dq} = Q^{nc}$$

Esta ecuación diferencial que describe el movimiento de un mecanismo de un grado de libertad es generalmente de una gran complejidad, siendo en la mayoría de los casos no lineal con coeficientes variables. Este tipo de ecuaciones normalmente son resueltas numéricamente. El método de Runge-Kutta es una técnica de solución numérica que generalmente da buenos resultados en problemas de mecanismos.

Algoritmo de Runge-Kutta para Ecuaciones Diferenciales de 2º Orden

Sea la ecuación diferencial: $\ddot{q} = f(t, q, \dot{q})$

El algoritmo de Runge-Kutta provee un método para determinar nuevos puntos de la curva solución, cada uno basado en un punto anterior y en cuatro evaluaciones de la función de segunda derivada $f(t, q, \dot{q})$. Para un incremento de tiempo h, los nuevos valores son:

$$q_{n+1} = q_n + h\left[q_n + \tfrac{1}{6}(m_1 + m_2 + m_3)\right]$$

$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + \tfrac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)$$

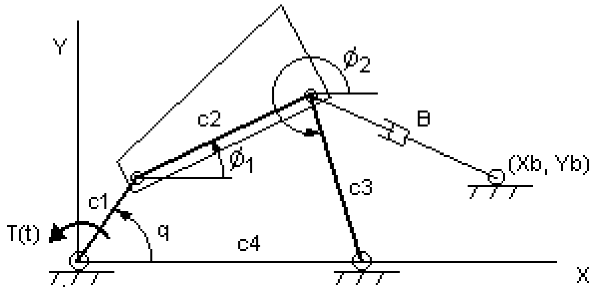
$$t_{n+1} = t_n + h$$

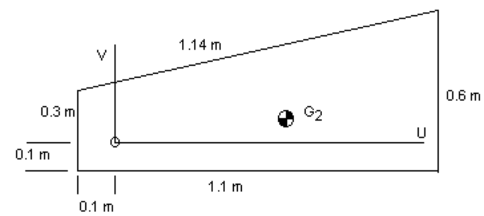
donde:

$$m_1 = hf\left(t_n, q_n, \dot{q}_{n)}\right)$$
$$m_2 = hf(t_n + 0.5h, q_n + 0.5h\dot{q}_n + 0.125m_1h, \dot{q}_n + 0.5m_1)$$
$$m_3 = hf(t_n + 0.5h, q_n + 0.5h\dot{q}_n + 0.125m_2h, \dot{q}_n + 0.5m_2)$$
$$m_4 = hf(t_n + h, q_n + h\dot{q}_n + 0.5m_3h, \dot{q}_n + m_3)$$

EJEMPLO: Al mecanismo de cuatro barras de la figura se aplica un torque impulsivo T(t)=250 N·m durante 1 s. Este mecanismo tiene acoplado un amortiguador de coeficiente B=55 N·s/m, tal como se muestra. Si el mecanismo está en reposo para la posición q=0.2 radianes, y si se desprecia el efecto de la gravedad, determine cual es la velocidad angular máxima que alcanza el cuerpo 1.

Datos: c_1=0.5 m, c_2=0.9 m, c_3=0.7 m, c_4=1.0 m
I_{10}=1.5 kg·m^2, I_{G2}=5 kg·m^2, I_{30}=3.5 kg·m^2
M_2=40 kg
X_b=1.3 m, Y_b=0.12 m
U_{G2}=0.5111 m, V_{G2}=0.1333 m





La ecuación de bucle del mecanismo permite plantear:

$$c_1 C_q + c_2 C_{\phi 1} + c_3 C_{\phi 2} - c_4 = 0$$
$$c_1 S_q + c_2 S_{\phi 1} + c_3 S_{\phi 2} = 0$$

de donde:

$$\phi_1 = 2\,\mathrm{tg}^{-1}\left[\frac{-A \pm \sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{C - B}\right]$$

$$\phi_2 = \mathrm{sen}^{-1}\left[\frac{-(c_1 S_q + c_2 S_{\phi 1})}{c_3}\right]$$

con:

$$A = 2c_1 c_2 S_q \qquad B = 2c_2(c_1 C_q - c_4) \qquad C = c_1^2 + c_2^2 - c_3^2 + c_4^2 - 2c_1 c_4 C_q$$

$$K_{\phi 1} = \frac{c_1}{c_2}\frac{S_{q-\phi 2}}{S_{\phi 2-\phi 1}}$$

$$K_{\phi 2} = \frac{c_1}{c_3}\frac{S_{\phi 1-q}}{S_{\phi 2-\phi 1}}$$

$$L_{\phi 1} = \frac{(c_1 C_q + K_{\phi 1}^2 c_2 C_{\phi 1} + K_{\phi 2}^2 c_3 C_{\phi 2})C_{\phi 2} + (c_1 S_q + K_{\phi 1}^2 c_2 S_{\phi 1} + K_{\phi 2}^2 c_3 S_{\phi 2})S_{\phi 2}}{c_2 S_{\phi 2-\phi 1}}$$

$$L_{\phi 2} = \frac{(c_1 C_q + K_{\phi 1}^2 c_2 C_{\phi 1} + K_{\phi 2}^2 c_3 C_{\phi 2})C_{\phi 1} + (c_1 S_q + K_{\phi 1}^2 c_2 S_{\phi 1} + K_{\phi 2}^2 c_3 S_{\phi 2})S_{\phi 1}}{c_3 S_{\phi 1-\phi 2}}$$

La posición de G_2 está dada por:

$$X_{G2} = c_1 C_q + U_{G2} C_{\phi 1} - V_{G2} S_{\phi 1}$$
$$Y_{G2} = c_1 S_q + U_{G2} S_{\phi 1} + V_{G2} C_{\phi 1}$$

Por lo que: $V_{G2} = (K_{G2x} i + K_{G2y} j)\ \dot{q}$

Donde: $K_{G2x} = -c_1 S_q - U_{G2}K_{\phi 1} S_{\phi 1} - V_{G2}K_{\phi 1} C_{\phi 1}$

$K_{G2y} = c_1 C_q + U_{G2}K_{\phi 1} C_{\phi 1} - V_{G2}K_{\phi 1} S_{\phi 1}$

y por lo tanto:

$$L_{G2x} = -c_1 C_q - U_{G2} L_{\phi 1} S_{\phi 1} - U_{G2} K_{\phi 1}^2 C_{\phi 1} - V_{G2} L_{\phi 1} C_{\phi 1} + V_{G2} K_{\phi 1}^2 S_{\phi 1}$$
$$L_{G2y} = -c_1 S_q + U_{G2} L_{\phi 1} C_{\phi 1} - U_{G2} K_{\phi 1}^2 S_{\phi 1} - V_{G2} L_{\phi 1} S_{\phi 1} - V_{G2} K_{\phi 1}^2 C_{\phi 1}$$

La energía cinética del sistema es:

$$EC = 0.5M_1 V_{G1}^2 + 0.5 I_{G1} \dot{q}^2 + 0.5M_2 V_{G2}^2 + 0.5 I_{G2} \dot{\phi}_1^2 + 0.5M_3 V_{G3}^2 + 0.5 I_{G3} \dot{\phi}_2^2$$

$$EC = 0.5\ \dot{q}^2 [M_1 (K_{G1x}^2 + K_{G1y}^2) + I_{G1} + M_2 (K_{G2x}^2 + K_{G2y}^2) + I_{G2} K_{\phi 1}^2 +$$

$$+ M_3 (K_{G3x}^2 + K_{G3y}^2) + I_{G3} K_{\phi 2}^2]$$

que se puede poner como:

$$EC = 0.5\ \dot{q}^2 [I_{O1} + I_{O3} K_{\phi 2}^2 + M_2 (K_{G2x}^2 + K_{G2y}^2) + I_{G2} K_{\phi 1}^2]$$

Por lo que:

$$\Im(q) = I_{O1} + I_{O3} K_{\phi 2}^2 + M_2 (K_{G2x}^2 + K_{G2y}^2) + I_{G2} K_{\phi 1}^2$$

y

$$\varsigma(q) = 0.5 \frac{d\Im}{dq} = I_{O3} K_{\phi 2} L_{\phi 2} + I_{G2} K_{\phi 1} L_{\phi 1} + M_2 (K_{G2x} L_{G2x} + K_{G2y} L_{G2y})$$

El trabajo virtual del torque aplicado y de la fuerza del amortiguador permite definir la fuerza generalizada del sistema:

$$\delta W = T(t)\delta q - B\dot{D}\delta D$$

donde D es la longitud del amortiguador. Esta longitud está dada por:

$$D^2 = (X_b - c_1 C_q - c_2 C_{\phi 1})^2 + (c_1 S_q + c_2 S_{\phi 1} - Y_b)^2$$

de donde:

$$\frac{dD}{dq} = K_D = \frac{(X_b - c_1 C_q - c_2 C_{\phi 1})(c_1 S_q + c_2 S_{\phi 1} K_{\phi 1}) + (c_1 S_q + c_2 S_{\phi 1} - Y_b)(c_1 C_q + c_2 C_{\phi 1} K_{\phi 1})}{\sqrt{(X_b - c_1 C_q - c_2 C_{\phi 1})^2 + (c_1 S_q + c_2 S_{\phi 1} - Y_b)^2}}$$

Si se pone: $\dot{D} = K_D \dot{q}$ y $\delta D = K_D \delta q$

Entonces: $\delta W = \left[T(t) - B\dot{q} K_D^2 \right] \delta q$

Por lo que: Q = $T(t) - B\dot{q}K_D^2$

Así, la ecuación a resolver es:

$$\ddot{q} = \frac{1}{\Im(q)}\left[Q(t) - \varsigma(q)\dot{q}^2\right]$$