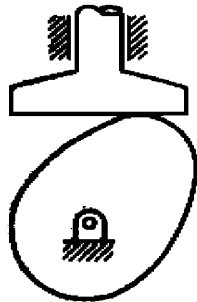


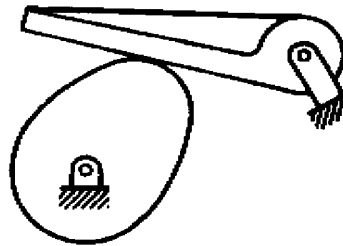
LEVAS

Una leva es un cuerpo sólido destinado a impartir, por contacto directo, un cierto movimiento a un segundo cuerpo, llamado seguidor. La forma de la leva y el tipo de contacto con el seguidor define una relación funcional particular entre la posición de la leva y la posición del seguidor. El uso de levas es una de las maneras más simples de generar movimientos complejos con una alta repetitividad y confiabilidad, a un costo reducido.

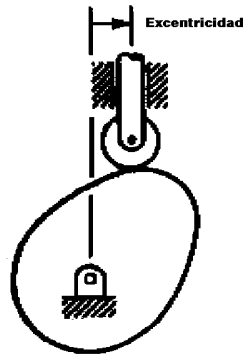
Hay muchos tipos de levas y seguidores, algunos de los cuales se ilustran en la figura. Las levas más empleadas son las de tipo disco o placa, que son comúnmente encontradas en máquinas de combustión interna, en máquinas herramientas, etc. Existen otros tipos de levas, menos comunes, como las de cuña y las cilíndricas, que también se muestran.



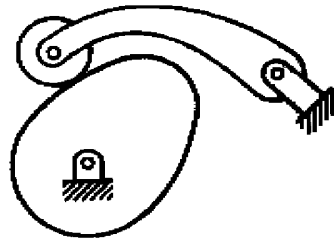
Seguidor Traslacional de Cara Plana



Seguidor Oscilante de Cara Plana



Seguidor Traslacional de Rodillo Excéntrico



Seguidor Oscilante de Rodillo

Entre las principales definiciones que se utilizan para las levas de disco están:

Perfil de la leva: es esa parte de la superficie de la leva que contacta al seguidor

Círculo Base: es el menor círculo, centrado en el eje de rotación de la leva y que es tangente al perfil de la leva.

Punto de Trazo: punto del seguidor que define su movimiento. En el caso de un seguidor de rodillo, como punto de trazo se usa el centro del rodillo.

Curva Primitiva: es el camino descrito por el punto de trazo.

Círculo Primo: es el menor círculo, centrado en el eje de rotación de la leva y tangente a la curva primitiva.

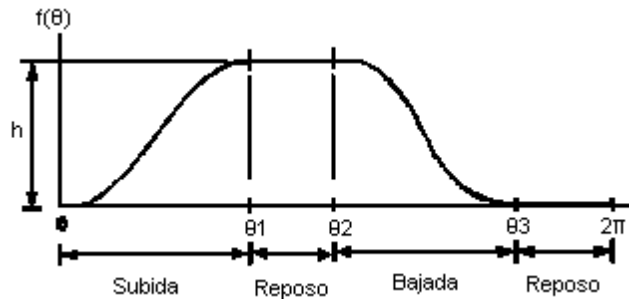
Desde el punto de vista cinemático, se deben responder dos interrogantes:

- Cómo diseñar una leva para generar un movimiento predeterminado
- Para una leva dada, cuál es el movimiento que genera.

Funciones de Desplazamiento

Una función de desplazamiento es una descripción matemática, $f(\theta)$, que relaciona el desplazamiento del seguidor con la posición angular de la leva. Esta función de desplazamiento puede ser traslacional o rotacional. La forma típica de una función de desplazamiento es la que se muestra en la figura, donde se distingue, en general, una etapa de subida, una de reposo superior, una de bajada y otra de reposo inferior, que se pueden describir como:

$$\begin{array}{ll} f(\theta) = f_1(\theta) & 0 \leq \theta < \theta_1 \\ h & \theta_1 \leq \theta < \theta_2 \\ f_3(\theta) & \theta_2 \leq \theta < \theta_3 \\ 0 & \theta_3 \leq \theta < 2\pi \end{array}$$



Con respecto a una referencia dada, el desplazamiento del seguidor se puede expresar como:

$$F(\theta) = F_o + f(\theta)$$

La velocidad y la aceleración del seguidor (lineal o angular) serán:

$$\dot{F}(\theta) = \frac{df(\theta)}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} f'(\theta)$$

$$\ddot{F}(\theta) = \ddot{\theta} f'(\theta) + \dot{\theta}^2 f''(\theta)$$

Funciones de Desplazamientos típicas

a) Función parabólica

Consideremos la siguiente ecuación de segundo grado:

$$f(\theta) = A_0 + A_1\theta + A_2\theta^2$$

$$\text{Si para } 0 \leq \theta < \theta_1: \quad f_1(0) = f_1' = 0$$

$$\text{entonces:} \quad f_1(\theta) = A_{21}\theta^2$$

$$\text{Si para } \theta_1 \leq \theta < \theta_2: \quad f_2(\theta_1) = h \quad \text{y} \quad f_2'(\theta_1) = 0$$

$$\text{entonces:} \quad f_2(\theta) = h + A_{22}\theta_1^2 - 2A_{22}\theta_1\theta + A_{22}\theta^2$$

Las constantes A_{21} y A_{22} se pueden determinar si se impone que para $\theta = \theta_1 / 2$

$$f_1(\theta_1 / 2) = f_2(\theta_1 / 2)$$

$$f_1'(\theta_1 / 2) = f_2'(\theta_1 / 2)$$

Por lo que:

$$A_{21} = 2h / \theta_1^2 \quad \text{y} \quad A_{22} = -2h / \theta_1^2$$

y, consecuentemente:

$$f_1(\theta) = \frac{2h\theta^2}{\theta_1^2} \quad \text{para } 0 \leq \theta < \theta_1$$

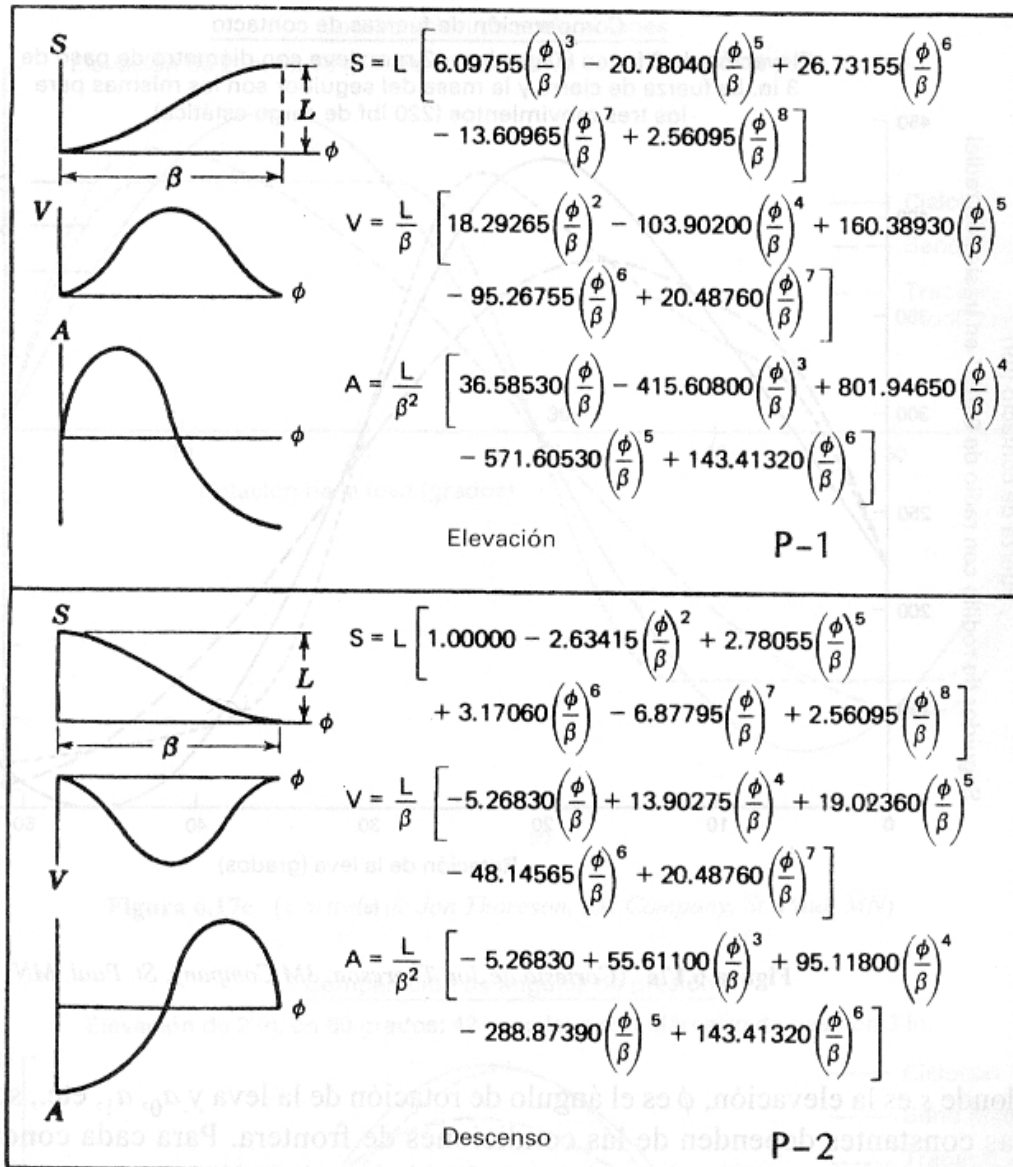
$$f_2(\theta) = h - 2h \frac{(\theta_1 - \theta)^2}{\theta_1^2} \quad \text{para } \theta_1 \leq \theta < \theta_2$$

b) Función Sinusoidal

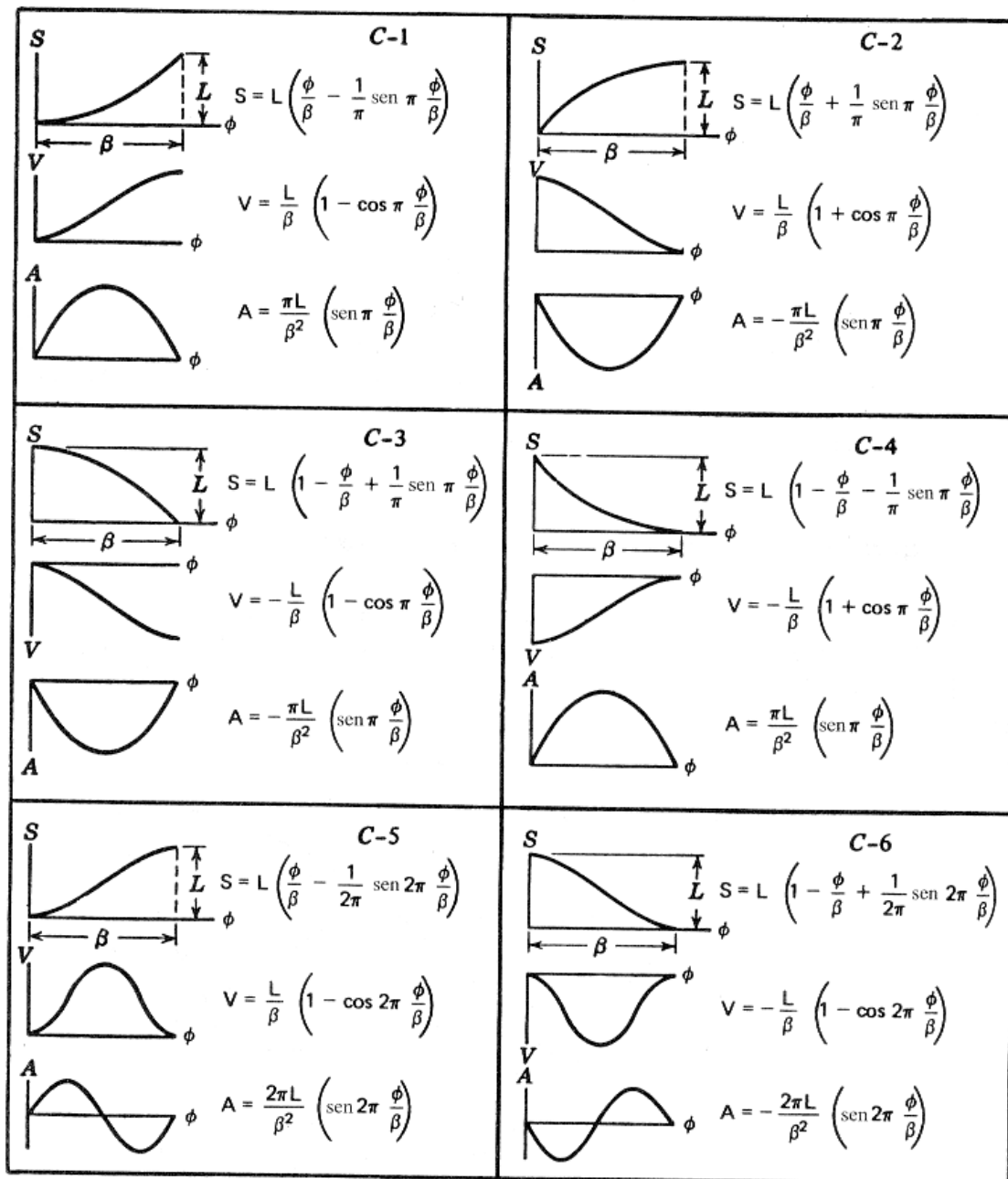
$$\begin{aligned} f(\theta) &= (h/2)[1 - \cos(\pi\theta/\theta_1)] & 0 \leq \theta < \theta_1 \\ &h & \theta_1 \leq \theta < \theta_2 \\ &(h/2)\{1 - \cos[\pi(\theta_3 - \theta)/(\theta_3 - \theta_2)]\} & \theta_2 \leq \theta < \theta_3 \\ &0 & \theta_3 \leq \theta < 2\pi \end{aligned}$$

c) Función Cicloidal

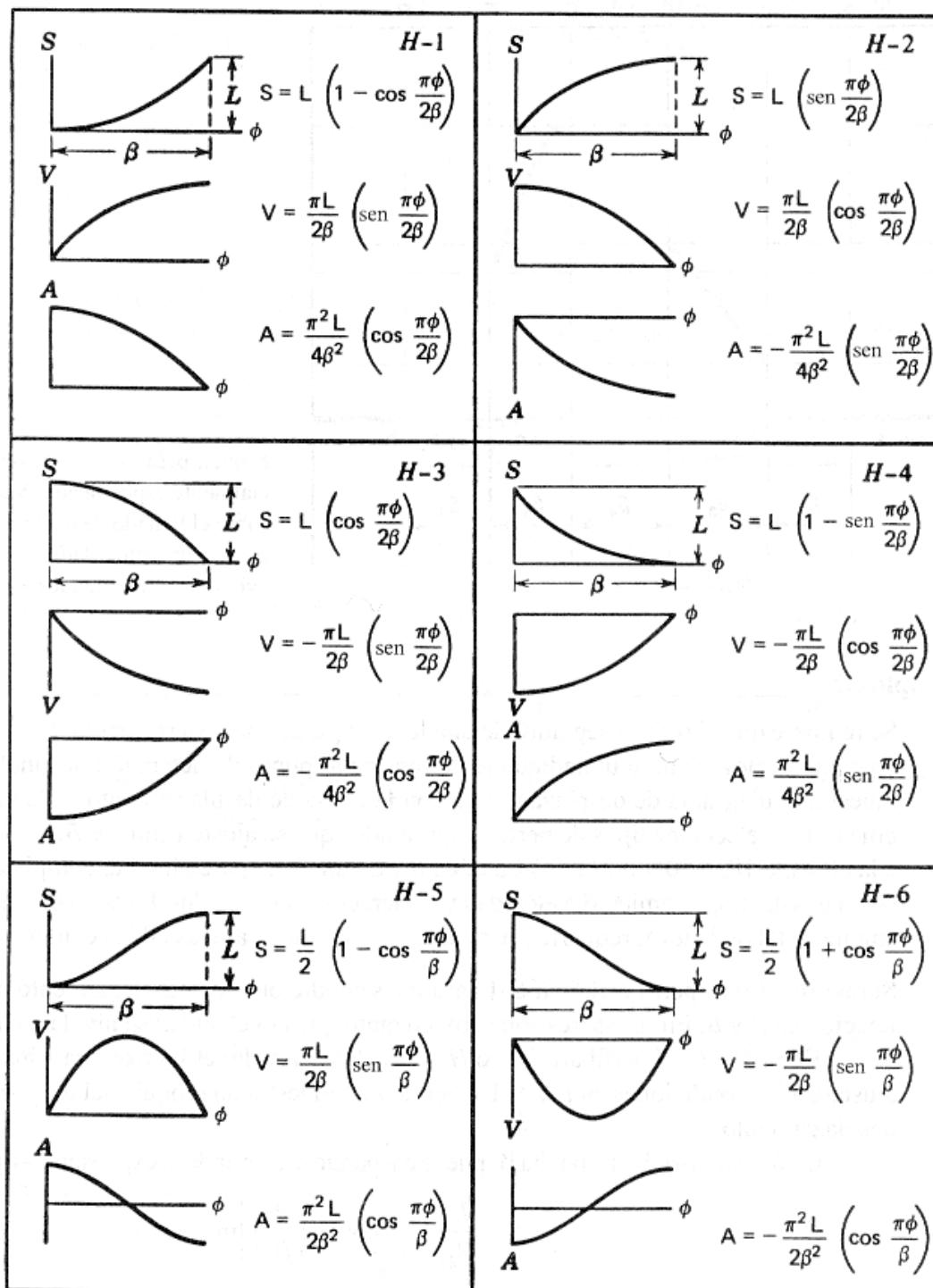
$$f(\theta) = \frac{h}{\pi} \left[\frac{\pi\theta}{\theta_1} - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi\theta}{\theta_1}\right) \right] \quad \text{para } 0 \leq \theta < \theta_1$$



Curvas Polinomiales de grado 8



Curvas Cicloidaes



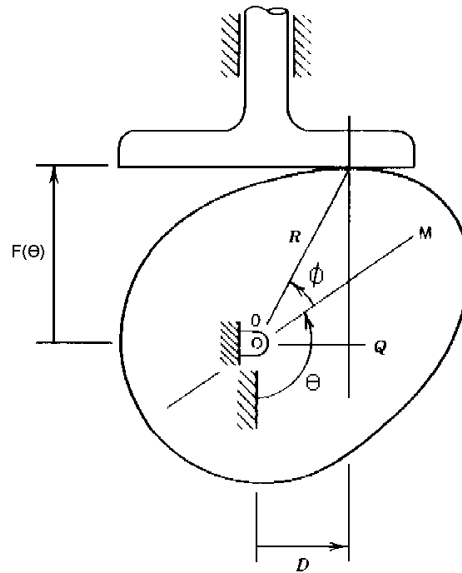
Curvas Armónicas

DISEÑO ANALITICO DE LEVAS DE DISCO

A) Seguidor traslacional de cara plana

$$\text{Sea } F(\theta) = R_o + f(\theta)$$

Donde, R_o es el radio del círculo base. La distancia desde O al perfil de la leva, medido a lo largo de OM, desde O hasta M, es R_o . Este es el punto de contacto cuando $\theta = 0$.



Ancho de la cara del seguidor

El punto de contacto entre la leva y el seguidor está a la distancia D a la derecha del eje de rotación de la leva. El punto Q es el polo de velocidad entre la leva y el seguidor. Por ello:

$$V_Q = \dot{\theta} (OQ) = \dot{\theta} D$$

la cual será también la velocidad del seguidor (V_s). Como:

$$V_s = \dot{F}(\theta) = \frac{d[R_o + f(\theta)]}{dt} = \dot{\theta} f'(\theta)$$

se obtiene que:

$$D = f'(\theta)$$

Por lo que el ancho total mínimo del seguidor debe ser igual a: $(f'_{max} - f'_{min})$

Ecuación polar del perfil de la leva

$$R \sin(\theta + \phi) = D = f'(\theta)$$

$$-R \cos(\theta + \phi) = F(\theta) = R_o + f(\theta)$$

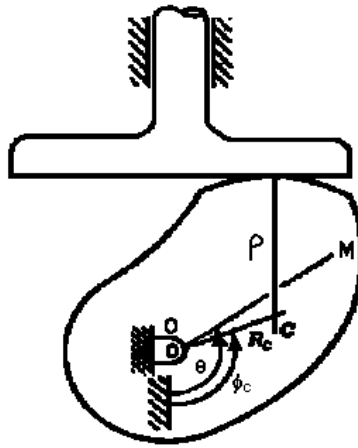
por lo que:

$$\phi = -\theta + \tan^{-1} \left\{ \frac{f'(\theta)}{-[R_o + f(\theta)]} \right\}$$

$$R = \sqrt{f'^2 + (R_o + f)^2}$$

Radio de curvatura

Reemplazando la zona del perfil de la leva en contacto con el seguidor, por la circunferencia de curvatura, entonces, para un giro infinitesimal, la línea OC gira lo mismo que OM.



Es decir:

$$\frac{d\phi_c}{d\theta} = 1$$

Además:

$$D(\theta) = f'(\theta) = R_c \sin \phi_c$$

$$F(\theta) = R_o + f(\theta) = -R_c \cos \phi_c + \rho$$

Así:

$$\frac{dD}{d\theta} = f''(\theta) = R_c \cos \phi_c \frac{d\phi_c}{d\theta}$$

Es decir:

$$f''(\theta) = R_c \cos \phi_c$$

Por lo que:

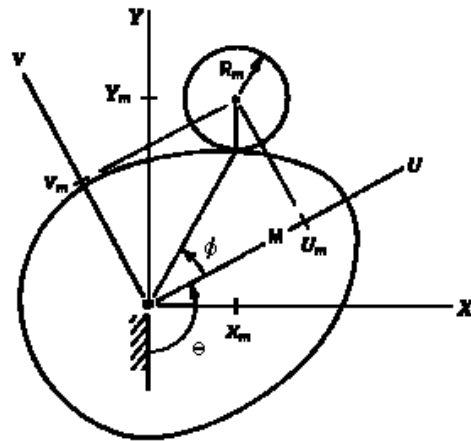
$$\rho = R_o + f(\theta) + f''(\theta)$$

Fresado del perfil. Ubicación del centro de la herramienta

Sea R_m el radio de la fresa. La posición del centro de la herramienta en coordenadas absolutas es:

$$X_m = f'(\theta)$$

$$Y_m = F(\theta) + R_m = R_o + f(\theta) + R_m$$

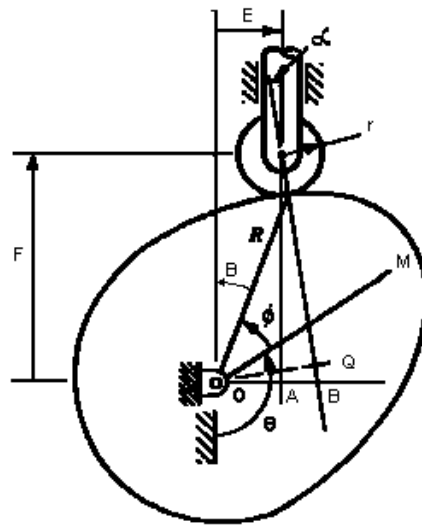


Dado que el sistema de coordenadas U-V, fijo a la leva, está girado en $(\theta - \pi/2)$ con respecto al sistema X-Y, por transformación de coordenadas se obtiene:

$$U_m = X_m \sin \theta - Y_m \cos \theta$$

$$V_m = X_m \cos \theta + Y_m \sin \theta$$

B) Seguidor traslacional de rodillo (r)



Angulo de presión

$$F(\theta) = F_o + f(\theta)$$

$$F_o = \sqrt{(R_o + r)^2 - E^2}$$

Sea B, el polo de velocidad entre la leva y el seguidor:

$$OB = F' = \frac{df}{d\theta}$$

por lo que:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AB}{F(\theta)} = \frac{F' - E}{F_o + f(\theta)}$$

Ecuación del perfil de la leva

$$B = \operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{E + r \operatorname{sen} \alpha}{F - r \cos \alpha} \right]$$

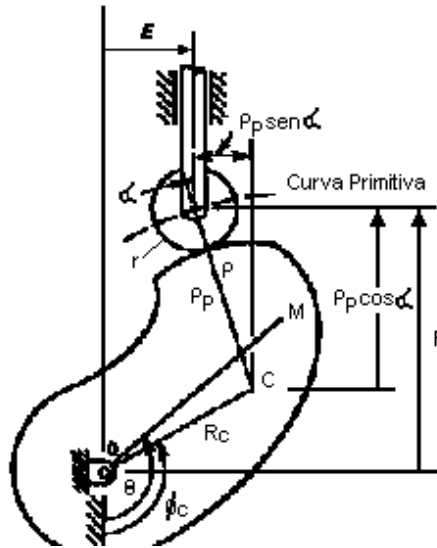
Como: $\theta + \phi + B = \pi$

Entonces:

$$\phi = \pi - \theta - \operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{E + r \operatorname{sen} \alpha}{F - r \cos \alpha} \right]$$

$$R = \sqrt{(F - r \cos \alpha)^2 + (E + r \operatorname{sen} \alpha)^2}$$

Radio de curvatura



Para un giro infinitesimal, OC gira lo mismo que OM. Es decir, $\phi' = \frac{d\phi_c}{d\theta} = 1$

Para la curva primitiva:

$$\rho_p \cos \alpha = F + R_c \cos \phi_c$$

$$\rho_p \operatorname{sen} \alpha = R_c \operatorname{sen} \phi_c - E$$

Derivando la componente horizontal con respecto a θ se obtiene:

$$\rho_p (\cos \alpha) \alpha' = R_c (\cos \phi_c) \phi_c'$$

por lo que:

$$\rho_p \cos \alpha = F + \rho_p (\cos \alpha) \alpha'$$

$$\rho_p = \frac{F \sec \alpha}{1 - \alpha'}$$

donde:

$$\alpha' = \frac{f'' - f' \operatorname{tg} \alpha}{F \sec^2 \alpha}$$

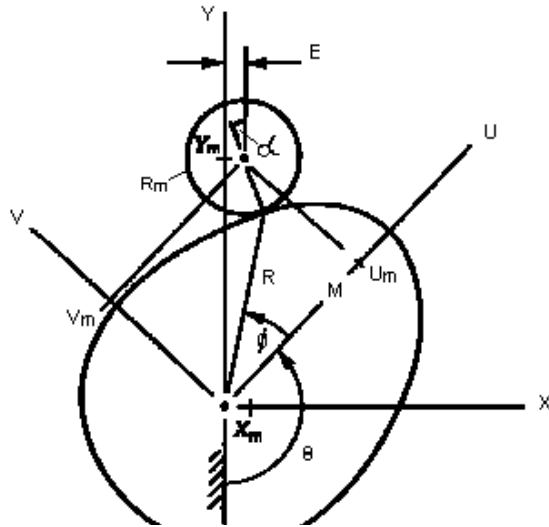
por lo que finalmente, luego de “algún trabajo”, se obtiene:

$$\rho_p = \frac{[F^2 + (f' - E)^2]^{3/2}}{F^2 - Ff'' + (f' - E)(2f' - E)}$$

y para el perfil de la leva:

$$\rho = \rho_p - r$$

Fresado del perfil. Ubicación del centro de la herramienta



La ubicación del centro de la herramienta, en coordenadas absolutas es:

$$X_m = E + (r - R_m) \operatorname{sen} \alpha$$

$$Y_m = F - (r - R_m) \cos \alpha$$

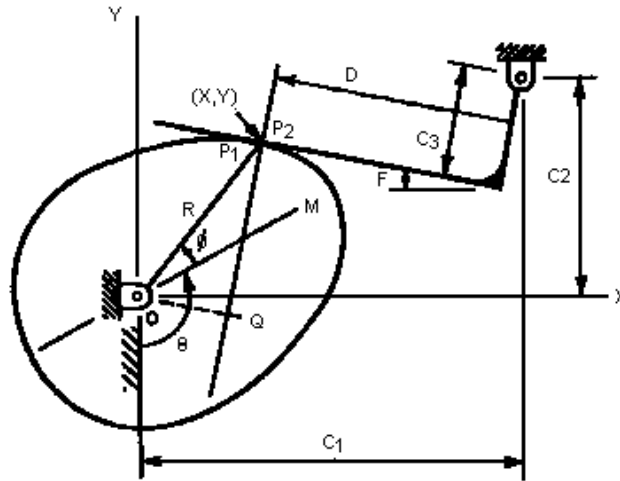
mediante un cambio de variables, para una rotación $(\theta - \pi/2)$, se obtiene:

$$U_m = X_m \operatorname{sen} \theta - Y_m \cos \theta$$

$$V_m = X_m \cos \theta + Y_m \operatorname{sen} \theta$$

C) Seguidor oscilante de cara plana

Nota: - La componente de velocidad de los puntos en contacto, según la normal, es igual
 - En una línea de un cuerpo, la componente de velocidad según esa línea es igual para todos los puntos de ella.



En el punto de contacto, la componente de velocidad según la normal es:

$$V_{P2}^N = \dot{F}D$$

pero, la componente de la de velocidad según la normal es:

$$V_{P1}^N = \dot{\theta}(OQ)$$

de donde:

$$\frac{OQ}{D} = \frac{\dot{F}}{\dot{\theta}} = \frac{dF}{d\theta} = \frac{df}{d\theta}$$

que sirve para eliminar OQ de:

$$OQ + D + C_2 \sin F = C_1 \cos F$$

por lo que:

$$D = \frac{C_1 \cos F - C_2 \sin F}{1 + f'}$$

Perfil de la leva

Las coordenadas del punto de contacto son:

$$X = C_1 - C_3 \sin F - D \cos F$$

$$Y = C_2 - C_3 \cos F + D \sin F$$

como:

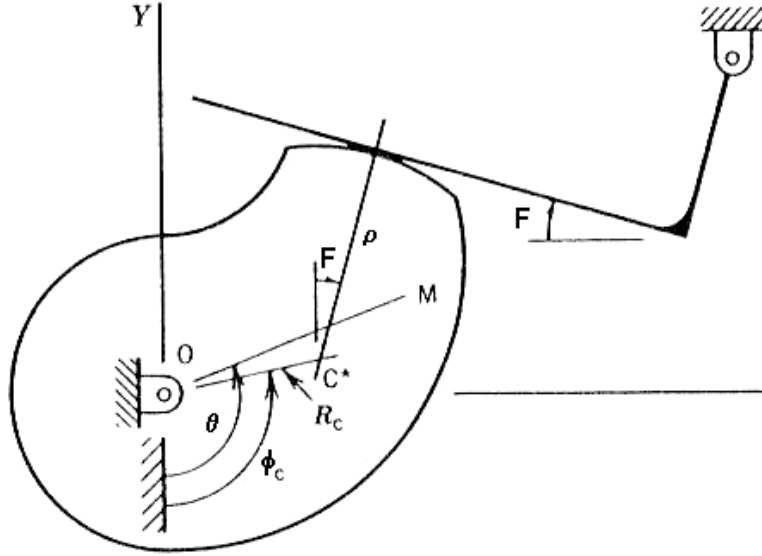
$$\theta + \phi - \pi / 2 = \text{tg}^{-1}(Y / X)$$

entonces:

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \theta + \text{tg}^{-1}(Y / X)$$

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

Radio de curvatura de la leva



$$\begin{aligned} R_c \sin \phi_c + \rho \sin F + D \cos F + C_3 \sin F - C_1 &= 0 \\ -R_c \cos \phi_c + \rho \cos F - D \sin F + C_3 \cos F - C_2 &= 0 \end{aligned}$$

Estas dos ecuaciones involucran las incógnitas: R_c , ϕ_c y ρ . Para eliminar R_c y ϕ_c en una sola sustitución, se requiere la derivada de la ecuación en vertical para sustituirla en la ecuación en horizontal:

$$R_c \sin \phi_c' - \rho \sin FF' - D' \sin F - D \cos FF' - C_3 \sin FF' = 0$$

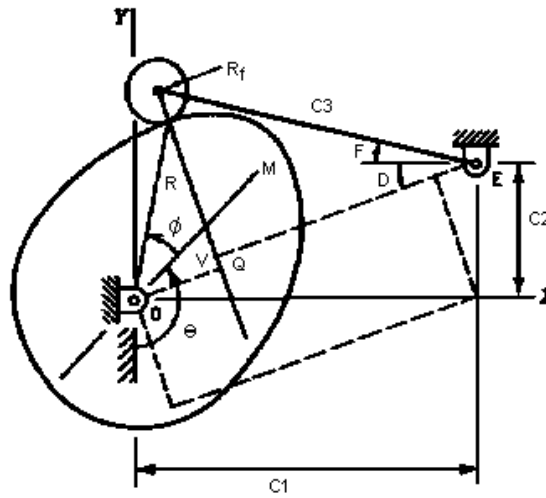
se debe, además, derivar la expresión para D:

$$D' = \frac{-f'(C_1 \sin F + C_2 \cos F) - f''D}{1 + f'}$$

con estas sustituciones, y recordando que $d\phi_c/d\theta = 1$ y que $F' = f'$, se puede eliminar el término $R_c \sin \phi_c$. Después de una cierta manipulación algebraica se llega a:

$$\rho = \frac{(1 + 2f')(C_1 \sin F + C_2 \cos F) + f''D}{(1 + f')^2} - C_3$$

D) Seguidor oscilante de rodillo



Sea $F(\theta) = F_0 + f(\theta)$ la función de desplazamiento angular del seguidor. F_0 se determina de:

$$(R_o + R_f)^2 = (C_1 - C_3 \cos F_0)^2 + (C_2 + C_3 \sin F_0)^2$$

La velocidad del punto de contacto de la leva, a lo largo de la línea de contacto es:

$$V_{P1} = \dot{\theta}(OQ)$$

La velocidad del punto de contacto del seguidor, a lo largo de la línea de contacto es:

$$V_{P2} = \dot{F}(VE)$$

Como estas velocidades deben ser iguales:

$$OQ = \frac{\dot{F}}{\dot{\theta}} VE = \frac{dF}{d\theta} VE$$

además:

$$VE = C_3 \cos(F + D) = C_3 (\cos F \cos D - \sin F \sin D)$$

$$OQ + VE = C_1 \cos D + C_2 \sin D$$

De donde:

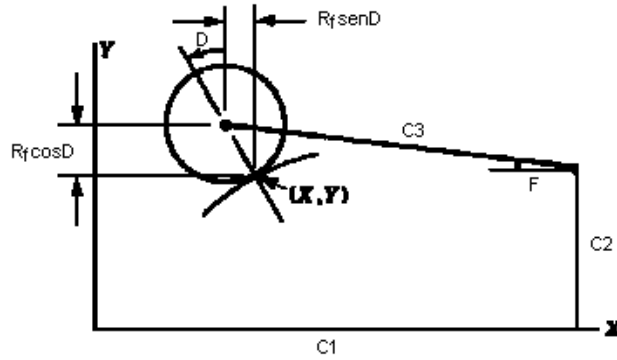
$$D = \tan^{-1} \left[\frac{C_3(1 + f') \cos F - C_1}{C_3(1 + f') \sin F + C_2} \right]$$

Perfil de la leva

Las coordenadas del punto de contacto son:

$$X = C_1 - C_3 \cos F + R_f \sin D$$

$$Y = C_2 + C_3 \sin F - R_f \cos D$$



Como: $\theta + \phi - \pi / 2 = \text{tg}^{-1}(Y / X)$

Entonces:

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \theta + \text{tg}^{-1}(Y / X)$$

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

Radio de curvatura

De la ecuación vectorial de bucle:

$$R_c \sin \phi_c - \rho_p \sin D + C_3 \cos F - C_1 = 0$$

$$-R_c \cos \phi_c + \rho_p \cos D - C_3 \sin F - C_2 = 0$$

Esto da dos ecuaciones y tres incógnitas: R_c , ϕ_c y ρ_p . Igual que en el caso anterior, es posible eliminar dos de las tres incógnitas, utilizando la derivada de la ecuación horizontal en la ecuación vertical:

$$R_c \phi'_c \cos \phi_c - \rho_p D' \cos D - C_3 F' \sin F = 0$$

donde $\phi'_c = 1$

Para determinar D' , la expresión ya encontrada para D se puede poner como:

$$\text{tg } D = \frac{C_3(1 + f') \cos F - C_1}{C_3(1 + f') \sin F + C_2}$$

De esta expresión se puede obtener que:

$$D' = \frac{C_3 f''(C_2 \cos F + C_1 \sin F) - C_3^2(1 + f')^2 + C_3 f'(1 + f')(C_1 \cos F - C_2 \sin F)}{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2(1 + f')^2 + 2C_3(1 + f')(C_2 \sin F - C_1 \cos F)}$$

Así:

$$\rho_p = \frac{C_2 + C_3(1 + f') \sin F}{(1 - D') \cos D}$$

y, finalmente:

$$\rho = \rho_p - R_f$$