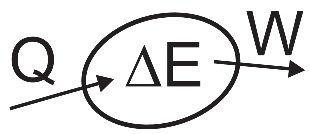
Capítulo 5

Energía

En este capítulo se verán los aspectos energéticos asociados al flujo de un fluido cualquiera. Para ésto se introduce, en una primera etapa, la primera ley de la termodinámica que establece la ley de conservación de la energía. En una segunda etapa se analiza la segunda ley de la termodinámica, lo cual permite introducir la no idealidad o irreversibilidad de un flujo y la existencia de pérdidas de energía.

5.1 Primera ley de la termodinámica

El primer principio de la termodinámica establece que la energía se conserva en todo instante, por lo que sólo puede transformarse de un tipo de energía en otro.



Sistema cerrado

Para un sistema cerrado, el cual sólo puede relacionarse con el medio mediante la transferencia de calor Q y trabajo W, la primera ley de la termodinámica queda representada matemáticamente por

$$\frac{DE}{Dt} = \underbrace{\frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt}}_{\substack{\text{interacción} \\ \text{energética}}},$$

donde

- Q: Calor o Energía neta de transición que se transfiere de un sistema a otro como resultado de una diferencia de temperatura. El calor transferido por unidad de tiempo, $\dot{Q} = dQ/dt$, representa todas las formas de intercambio de energía entre el sistema y el medio circundante, que se produce a causa de una diferencia de temperatura entre ambos como por ejemplo radiación, conducción, convección. Por convención $\dot{Q}$ se considera positivo si entra en el sistema.
- W: Energía de transición neta hacia o desde un sistema que existe cuando fuerzas exteriores al

sistema desplaza a este una cierta distancia. El trabajo transferido por unidad de tiempo, $\dot{W} = dW/dt$, se denomina potencia y esta compuesto por

a) el trabajo neto realizado sobre el medio exterior al sistema como consecuencia de las tensiones en los puntos de la superficie que separa el sistema y el medio externo, a través de los cuales existe un flujo de fluido Este trabajo se designará por W_{flujo}.

b) Otras formas de trabajo realizado sobre el medio. Por lo general se trata del trabajo realizado por o sobre un eje de rotación y se representará por W_{eje}.

E: Energía almacenada en el sistema que depende, por lo tanto, de la masa. Dentro de la energía almacenada, E, se consideran la energía potencial, la energía cinética y la energía interna.

Una diferencia importante entre la energía almacenada y las interacciones energéticas es que la primera es una propiedad del sistema y depende por lo tanto sólo del estado actual del sistema y no de cómo se alcanzó ese estado. Q y W son, por el contrario, funciones que dependen tanto de los estados final e inicial como de proceso de transformación de un estado a otro. Este tipo de funciones se denominan también funciones de línea.

Si E es la energía almacenada en el sistema y e es la energía almacenada por unidad de masa o energía específica, se cumple que

$$E = \int_{\text{Sis}} e\rho dv \,,$$

con

$$e = \frac{V^2}{2} + gz + u$$

donde V es la velocidad y el término asociado representa la energía cinética, z es la altura con respecto a alguna referencia y representa la energía potencial y u es la energía interna. Para un sistema cerrado se cumple por lo tanto que

$$\frac{DE}{Dt} = \frac{D}{Dt}\int_{\text{Sis}} e\rho dv = \left(\frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt}\right)_{\text{Sis}} \,.$$

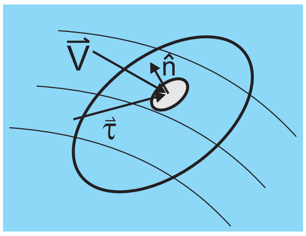
Aplicando el teorema de transporte de Reynolds, para un volumen de control coincidente con el sistema, se obtiene

$$\frac{D}{Dt}\int_{\text{Sis}} e\rho dv = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} e\rho dv + \int_{SC} e(\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}) = \left(\frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt}\right)_{VC} \,.$$

$\Rightarrow$

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW_{\text{eje}}}{dt} - \frac{dW_{\text{flujo}}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} e\rho dv + \int_{SC} e(\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}) \,.$$

Si sobre la superficie de control analizamos un elemento diferencial de área dA, la fuerza que actúa sobre este elemento es $\vec{\tau}dA$, donde $\vec{\tau}$ es la tensión en el punto. $\vec{\tau}$ tendrá, por lo general, una componente $\vec{\sigma}_{nn}$ normal a la superficie, y otra $\vec{\tau}_{ss}$ paralela a ésta. El flujo de trabajo por unidad de tiempo que es transferido a través de dA es $\vec{\tau}dA\vec{V}$.



Superficie de control

Integrando sobre la superficie de control y considerando la convención de signos se obtiene

$$\dot{W}_{\text{flujo}} = -\int\limits_{SC} \vec{\tau}\cdot\vec{V}dA = -\int\limits_{SC} \vec{\tau}_{ss}\cdot\vec{V}dA = -\int\limits_{SC} \vec{\sigma}_{nn}\cdot\vec{V}dA\,.$$

Reemplazando en la ecuación de conservación de energía se obtiene

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW_{\text{eje}}}{dt} + \int\limits_{SC} \vec{\tau}_{ss}\cdot\vec{V}dA + \int\limits_{SC} \vec{\sigma}_{nn}\cdot\vec{V}dA = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{VC} e\rho dv + \int\limits_{SC} e(\rho\vec{V}\cdot d\vec{A})\,.$$

El término asociado a los esfuerzos de corte se puede hacer cero eligiendo un volumen de control adecuado tal que se cumpla $\vec{\tau}_{ss}\cdot\vec{V} = 0$ sobre toda la superficie de control (esta condición se cumple cuando el vector velocidad es normal a la superficie de control en lo puntos donde el flujo entra en el volumen de control). Considerando sólo la componente normal de $\vec{\tau}$, es decir, $\vec{\sigma}_{nn}$, la relación para $\dot{W}_{\text{flujo}}$ se puede reescribir de la siguiente manera

$$\dot{W}_{\text{flujo}} = -\int\limits_{SC} \vec{\sigma}_{nn}\cdot\vec{V}dA\,.$$

Como además se cumple que $\rho\, v = 1$ se obtiene finalmente

$$\dot{W}_{\text{flujo}} = -\int\limits_{SC} v\rho\sigma_{nn}\hat{n}\cdot\vec{V}dA = -\int\limits_{SC} \sigma_{nn}v\hat{n}\cdot\rho\vec{V}\cdot dA\,.$$

Reemplazando en la ecuación de conservación de energía y asociando el vector unitario $\hat{n}$ al elemento de área dA, se obtiene finalmente

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW_{\text{eje}}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{VC} e\rho dv + \int\limits_{SC} \left(\frac{V^2}{2} + gz + u - \sigma_{nn}v\right)(\rho\vec{V}\cdot d\vec{A})\,. \tag{5.1}$$

Esta ecuación es válida en ausencia de esfuerzos de corte o viscosos y para un flujo que entra y sale de un volumen de control en dirección normal a la superficie de control. El esfuerzo normal a la superficie de control es igual a la presión con signo cambiado, es decir, $\sigma_{nn} = -p$, por lo que la ecuación anterior queda

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW_{\text{eje}}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{VC} e\rho dv + \int\limits_{SC} \left(\frac{V^2}{2} + gz + u + pv\right)(\rho\vec{V}\cdot d\vec{A})\,.$$

En la termodinámica se define además la entalpía específica h como

$$h = u + pv\,.$$

Reemplazando se obtiene

$$\frac{dQ}{dt}-\frac{dW_{\text{eje}}}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} e\rho dv+\int_{SC}\left(\frac{V^2}{2}+gz+h\right)(\rho\vec{V}\cdot d\vec{A})\;.$$

Si el flujo es permanente la ecuación anterior queda

$$\frac{dQ}{dt}-\frac{dW_{\text{eje}}}{dt}=\int_{SC}\left(\frac{V^2}{2}+gz+h\right)(\rho\vec{V}\cdot d\vec{A})\;.$$

Si se tiene un número finito de secciones donde el flujo atraviesa la superficie de control entrando (e) o saliendo (s) del volumen de control y si además suponemos que las propiedades del fluido y del flujo permanecen constantes en éstas secciones, lo cual es una aproximación aceptable en muchos casos, la integral de la ecuación anterior puede ser reemplazada por sumatorias sobre las secciones de paso de la siguiente manera

$$\int_{\text{SC}}\left(\frac{V^2}{2}+gz+h\right)(\rho\vec{V}\cdot d\vec{A})=\sum_s\left(\frac{V^2}{2}+gz+h\right)(\rho VA)-\sum_e\left(\frac{V^2}{2}+gz+h\right)(\rho VA)\,.$$

Reemplazando, la ecuación de conservación de la energía queda

$$\frac{dQ}{dt}-\frac{dW_{\text{eje}}}{dt}=\sum_s\left(\frac{V^2}{2}+gz+h\right)(\rho VA)-\sum_e\left(\frac{V^2}{2}+gz+h\right)(\rho VA)\,.$$

Si existe solo una entrada y una salida se tendrá

$$\frac{dQ}{dt}-\frac{dW_{\text{eje}}}{dt}=\left(\frac{V_s^2}{2}+gz_s+h_s\right)(\rho_sV_sA_s)-\left(\frac{V_e^2}{2}+gz_e+h_e\right)(\rho_eV_eA_e)\,.$$

Por continuidad se tiene además que

$$\rho_eV_eA_e=\rho_sV_sA_s=\dot{m}$$

$\Rightarrow$

$$\dot{m}\left[(h_s-h_e)+g(z_s-z_e)+\frac{V_s^2-V_e^2}{2}\right]=\dot{Q}-\dot{W}_{\text{eje}}\,.$$

Para un flujo adiabático ($\dot{Q}=0$) y con una variación en la energía interna despreciable ($u_e-u_s\approx 0$) la ecuación anterior queda de la siguiente manera

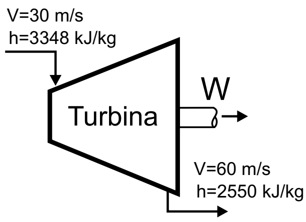
$$\dot{m}\left[(p/\rho)_s-(p/\rho)_e+g(z_s-z_e)+\frac{V_s^2-V_e^2}{2}\right]=\dot{W}_{\text{neto}}\,.$$

Para un flujo incompresible se obtiene

$$\frac{\dot{m}}{\rho}\left[(p_s-p_e)+g\rho(z_s-z_e)+\frac{1}{2}\rho(V_s^2-V_e^2)\right]=\dot{W}_{\text{neto}}\,.$$

Aplicación

Si el flujo a través de la turbina de la figura es adiabático, es decir, $\dot{Q}_{\mathrm{neto}} = 0$, y se desprecian los cambios de altura, es decir, $z_1 = z_2$, determine la potencia a extraer de la turbina por unidad de masa de vapor.



Turbina a vapor

5.1.1 Flujo no uniforme

Hasta aquí se ha considerado que el flujo es uniforme en las secciones en que el flujo entra y/o sale del volumen de control analizado. Si el flujo no es uniforme se introduce el coeficiente de correción para la energía cinética, α, tal que

$$\int_{\mathrm{SC}} \frac{V^2}{2}\rho\vec{V}d\vec{A} = \dot{m}\left(\frac{\alpha_s\bar{V}_s^2}{2} - \frac{\alpha_e\bar{V}_e^2}{2}\right),$$

donde $\bar{V}$ es la velocidad media y α se define por

$$\alpha = \frac{\int_{\mathrm{A}} \left(\frac{V^2}{2}\right)\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}}{\dot{m}\frac{1}{2}\bar{V}^2}.$$

La ecuación de conservación de energía para un flujo no uniforme quedará, por lo tanto, de la siguiente forma

$$\left(p + \frac{1}{2}\rho\alpha\bar{V}^2 + \rho g z\right)_s = \left(p + \frac{1}{2}\rho\alpha\bar{V}^2 + \rho g z\right)_e + \frac{\dot{W}}{Q}.$$

Sin embargo, para la mayoría de los casos prácticos se puede considerar $\alpha = 1$.

5.1.2 Conservación de la energía vs. Bernoulli

La ecuación de Bernoulli desarrollada para una línea de corriente y un flujo incompresible donde no existen efectos viscosos es

$$p + \rho g z + \frac{1}{2}\rho V^2 = \mathrm{cte}$$

o entre dos puntos de una misma línea de corriente se obtiene

$$p_e + \rho g z_e + \frac{1}{2}\rho V_e^2 = p_s + \rho g z_s + \frac{1}{2}\rho V_s^2.$$

La ecuación de conservación de la energía se puede aplicar también al flujo de una partícula entre dos puntos de una línea de corriente. Esta ecuación, en ausencia de trabajo neto ($\dot{W} = 0$) y para un flujo incompresible, es

$$\dot{m}\left[(u_s - u_e) + \frac{(p_s - p_e)}{\rho} + g(z_s - z_e) + \frac{1}{2}(V_s^2 - V_e^2)\right] = \dot{Q}_{\mathrm{neto}}.$$

Dividiendo por $\dot{m}$ y reordenando se obtiene

$$\left(\frac{p_e}{\rho} + \frac{V_e^2}{2} + g z_e\right) - \left(\frac{p_s}{\rho} + \frac{V_s^2}{2} + g z_s\right) = (u_s - u_e) - \frac{\dot{Q}}{\dot{m}}.$$

Se ve que la ecuación de conservación de energía y la ecuación de Bernoulli son equivalentes si el término del lado derecho de la última ecuación desaparece, es decir, si

$$(u_s - u_e) - \frac{\dot{Q}}{\dot{m}} = 0.$$

La diferencia en la formulación de ambas ecuaciones está en que la ecuación de Bernoulli desprecia las posibles irreversibilidades existentes en el flujo y la ecuación de conservación de energía no. Por lo tanto, la diferencia entre ambos resultados, es decir, el término $(u_s - u_e) - \frac{\dot{Q}}{\dot{m}}$ debe estar asociado a las irreversibilidades existentes en el flujo.

A la combinación de términos

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz\,,$$

que representan las tres diferentes formas de energía mecánica asociadas a un flujo no viscososo o sin pérdidas, se le denomina energía útil. Por lo tanto, la combinación de términos $(u_s - u_e) - \frac{\dot{Q}}{\dot{m}}$ representa la variación de energía útil en un flujo por causa de lss irreversibilidades. Como veremos en la siguiente sección, para un flujo cualquiera, se cumple además que

$$(u_s - u_e) - \frac{\dot{Q}}{\dot{m}} \geq 0$$

por lo que este término representa una disminución o pérdida de energía útil, es decir

$$(u_s - u_e) - \frac{\dot{Q}}{\dot{m}} = \text{pérdida}.$$

Como el flujo que estamos analizando es incompresible se puede multiplicar la ecuación de conservación de energía por ρ obteniendose la siguiente ecuación en unidades de presión

$$\left(p_e + \frac{1}{2}\rho V_e^2 + \rho g z_e\right) - \left(p_s + \frac{1}{2}\rho V_s^2 + \rho g z_s\right) = \Delta P_R\,,$$

donde ΔP_R representa las irreversibilidades en unidades de presión. Dividiendo por ρg obtenemos el equivalente de ésta ecuación en unidades de longitud o altura, es decir,

$$\left(\frac{p_e}{\rho g} + \frac{V_e^2}{2g} + z_e\right) - \left(\frac{p_s}{\rho g} + \frac{V_s^2}{2g} + z_s\right) = \Delta H_R\,.$$

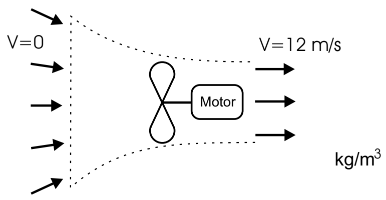
Si se considera ahora que el trabajo neto $\dot{W} \neq 0$, el primer principio de la termodinámica para un flujo incompresible y estacionario se puede escribir como

$$\left(p + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho g z\right)_s = \left(p + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho g z\right)_e + \frac{\dot{W}}{Q} - \Delta P_R\,. \tag{5.2}$$

Esta ecuación se denomina, en algunos libros, como la ecuación extendida o generalizada de Bernoulli o simplemente ecuación de Bernoulli. Dependiendo de la dirección de $\dot{W}$, es decir, si se trata de una bomba o turbina, el signo que lo acompaña será positivo o negativo.

Aplicación

El ventilador axial de la figura, que es accionado por un motor eléctrico que entrega $0.4\,kW$ de potencia, produce un flujo de un diámetro de $0.6\,m$ y una velocidad de $12\,m/s$. Si la velocidad del aire aguas arriba del ventilador es despreciable determine el aumento de energía útil en el flujo y la eficiencia del ventilador.



Ventilador axial

5.2 Segunda ley de la termodinámica

En esta sección analizaremos la segunda ley o principio de la termodinámica. En particular nos interesará la relación entre este principio y las pérdidas de energía útil. El segundo principio de la termodinámica para un sistema cerrado queda expresado mediante la siguiente relación

$$\frac{DS}{Dt} = \frac{D}{Dt}\int_{\text{Sis}} s\rho dv \geq \sum \left(\frac{\delta \dot{Q}}{T}\right)_{\text{Sis}} ,$$

donde S es la entropía del sistema y s la entropía específica. Evaluando la ecuación anterior entre dos estados termodinámicos distintos 1 y 2 nos queda

$$\underbrace{S_2 - S_1}_{\text{Propiedad}} \geq \underbrace{\int_1^2 \frac{\delta Q}{T}}_{\text{Transporte}} , \tag{5.3}$$

es decir la variación de la entropía del sistema, que es una propiedad termodinámica del sistema, es mayor que la transferencia de entropía. El signo igual asociado a la ecuación anterior se refiere un proceso de transformación, entre el estado 1 y el 2, reversible, es decir

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} .$$

Se define, como una medida de la desigualdad de la ecuación 5.3, lo que representa a su vez una medida de la irreversibilidad o no idealidad existente, la generación de entropía, S_{gen}, como

$$S_{\text{gen}} = S_2 - S_1 - \int_1^2 \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} \geq 0. \tag{5.4}$$

Se ve que S_{gen} nunca será negativo, que depende del proceso de transformación y que será igual a cero sólo en procesos reversibles.

En forma diferencial, la segunda ley de la termodinámica resulta

$$dS \geq \sum \frac{\delta Q}{T}$$

o en forma específica

$$ds \geq \sum \frac{\delta Q/\dot{m}}{T} = \frac{\delta q}{T} .$$

Reordenando se obtiene

$$Tds \geq \delta q$$

o

$$Ts_{\text{gen}} = Tds - \delta q \geq 0 . \tag{5.5}$$

Para un sistema abierto, o un volumen de control, la segunda ley de la termodinámica se escribe de la siguiente forma

$$\dot{S}_{\text{gen}} = \frac{dS}{dt} - \sum_i \frac{\dot{Q}}{T_i} + \sum_s \dot{m}s - \sum_e \dot{m}s \geq 0$$

donde el primer término del lado derecho representa la tasa de acumulación de entropía en el volumen de control, el segundo la transferencia de entropía via transferencia de calor y los dos últimos el flujo neto de entropía a través de la superficie de control.

Para un elemento diferencial, la ecuación de conservación de la energía en ausencia de trabajo externo, es decir $\dot{W} = 0$, resulta

$$\dot{m}\left[du + d(p/\rho) + d(V^2/2) + gdz\right] = \delta\dot{Q}$$

o en forma específica

$$du + d(p/\rho) + d(V^2/2) + gdz = \frac{\delta\dot{Q}}{\dot{m}} = \delta q\,.$$

De la termodinámica se sabe que

$$Tds = du + pd(1/\rho)\,.$$

$\Rightarrow$

$$Tds - pd(1/\rho) + d(p/\rho) + d(V^2/2) + gdz = \delta q\,.$$

Desarrollando el tercer término del lado izquierdo de la ecuación anterior y reordenando se obtiene

$$-\left[\frac{dp}{\rho} + d(V^2/2) + gdz\right] = (Tds - \delta q) = Ts_{\text{gen}}\,.$$

Como se vió anteriormente (ecuación 5.5) el lado derecho es mayor que cero y está relacionado con las irreversibilidades presentes, es decir, representa las pérdidas de energía útil.

$\Rightarrow$

$$-\left[\frac{dp}{\rho} + d(V^2/2) + gdz\right] = \delta(\text{pérdidas})\,,$$

que es lo que se había expresado al hacer la comparación entre la ley de conservación de la energía y la ecuación de Bernoulli para un flujo incompresible.

Si el flujo es compresible se obtendrá

$$du - pd(1/\rho) - \delta q = \delta(\text{pérdidas})$$

o

$$u_s - u_e + \int_e^s pd(1/\rho) - q = \text{pérdidas}\,.$$