

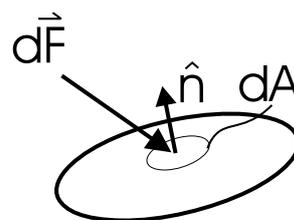
## Capítulo 2

# Estática de Fluidos

La estática de fluidos considera que el fluido está en reposo ( $\vec{V} = 0$ ) o en un movimiento tal que no existe movimiento relativo entre partículas adyacentes. En ambos casos no existirán esfuerzos de corte y las fuerzas existentes serán causadas sólo por la presión. La presión  $p$  ejercida sobre una superficie es la fuerza total  $\vec{F}$  perpendicular a la superficie por unidad de superficie, es decir

$$p = \frac{\vec{F} \cdot \hat{n}}{A}$$

donde  $\vec{F} \cdot \hat{n}$  es la componente normal a la superficie de la fuerza  $\vec{F}$  y  $A$  el área de la superficie.



Fuerza sobre un elemento de área.

La unidad de la presión en el SI se denomina Pascal y resulta de

$$[p] = [F/A] = \frac{N}{m^2} \equiv Pa$$

otras unidades de presión y su conversión al SI son

$$atm = 1.01325 \cdot 10^5 Pa \text{ (atmósferas)}$$

$$bar \equiv 10^5 Pa$$

$$psi = \frac{lbf}{in^2} = 6.8948 \cdot 10^3 Pa$$

$$psf = \frac{lbf}{ft^2} = 4.7880 \cdot 10 Pa$$

$$mmHG = 1.3332 \cdot 10^2 Pa \text{ (mm de columna de mercurio)}$$

$$mm.c.a. = 9.8067 Pa \text{ (mm de columna de agua)}$$

Los instrumentos que miden presión no lo hacen, por lo general, directamente si no que entregan la diferencia de presión del fluido (presión absoluta) y la presión del medio o atmosférica. Esta diferencia se denomina presión diferencial, relativa o manométrica  $\Rightarrow$

$$p_{\text{abs}} = p_{\text{man}} + p_{\text{atm}}$$

A pesar de que la presión atmosférica no es constante de un lugar a otro, esto no tiene mayor influencia para muchos propósitos en ingeniería. Existen casos, sobre todo cuando se trabaja con gases, donde es necesario considerar la presión absoluta. La figura 2.1 muestra gráficamente la relación que existe entre la presión absoluta y relativa para niveles superiores e inferiores a la presión atmosférica.

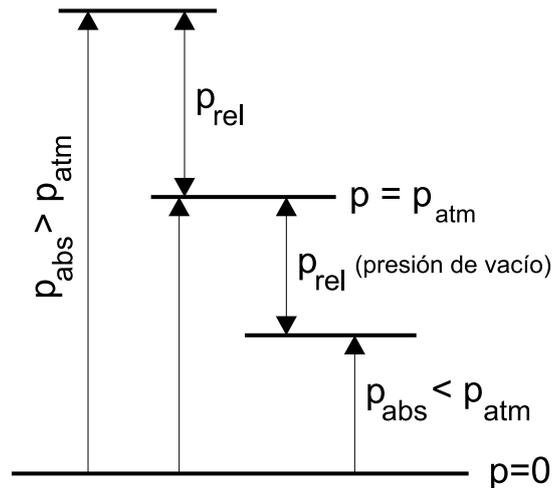


Figura 2.1: Relación entre la presión absoluta y la presión relativa.

## 2.1 Presión en un punto

Como se mencionó anteriormente la presión se utiliza para indicar la fuerza normal a una superficie por unidad de superficie. Para analizar como varía la presión en un punto con la orientación de la superficie analizaremos el esquema de la figura 2.2.

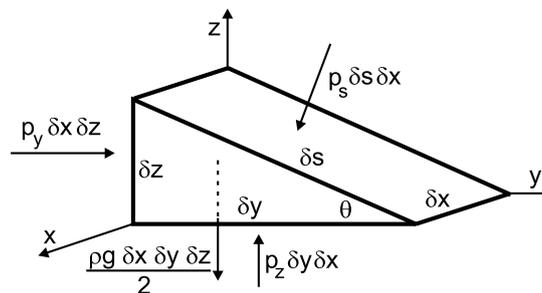


Figura 2.2: Elemento de fluido.

Las componentes de la ecuación de movimiento ( $\vec{F} = m\vec{a}$ ) en las direcciones  $y$  y  $z$  son

$$\sum \delta F_y = p_y \delta x \delta z - p_s \delta x \delta s \sin \theta = \rho \frac{\delta x \delta y \delta z}{2} a_y$$

$$\sum \delta F_z = p_z \delta x \delta y - p_s \delta x \delta s \cos \theta - \rho \frac{\delta x \delta y \delta z}{2} g = \rho \frac{\delta x \delta y \delta z}{2} a_z.$$

De la geometría del problema se tiene que

$$\delta y = \delta s \cos \theta \text{ y}$$

$$\delta z = \delta s \sin \theta.$$

Reemplazando se obtiene

$$p_y - p_s = \rho a_y \frac{\delta y}{2}$$

$$p_z - p_s = \rho (a_z + g) \frac{\delta z}{2}.$$

Dado que lo que interesa obtener es la presión en un punto se aplica el límite cuando  $\delta y, \delta x, \delta z \rightarrow 0$  resultando

$$p_y = p_s,$$

$$p_z = p_s.$$

Este resultado es independiente del ángulo  $\theta$  el cual fue además, elegido en forma arbitraria. Lo anterior indica que la presión en cualquier punto de un fluido en reposo o en movimiento tal que no existan esfuerzos de corte, es independiente de la dirección

$\Rightarrow$

$$p_x = p_y = p_z = p$$

Si el fluido esta en un movimiento tal que existen esfuerzos de corte, los esfuerzos normales no serán, por lo general, iguales en todas las direcciones. En estos casos se define la presión como el promedio de los esfuerzos normales mutuamente perpendiculares en un punto, es decir

$$p = \frac{p_x + p_y + p_z}{3}.$$

## 2.2 Campo de presiones

Sabiendo como varía la presión en un punto de un fluido con la dirección se requiere saber cómo varía ésta entre un punto del fluido y otro, para lo cual se analiza la figura 2.3 en donde se ha realizado un desarrollo de Taylor de primer orden para la presión a partir del centro de la figura y en todas las direcciones. La fuerza resultante en la dirección  $y$  es

$$\delta F_y = \left( p - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\delta y}{2} \right) \delta x \delta z - \left( p + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\delta y}{2} \right) \delta x \delta z$$

$$\delta F_y = -\frac{\partial p}{\partial y} \delta x \delta y \delta z.$$

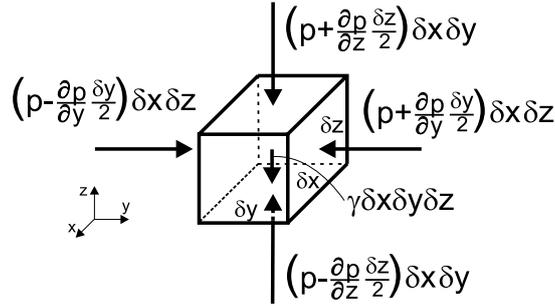


Figura 2.3: Variación de la presión en torno a un elemento de fluido.

Para las demás direcciones se obtiene en forma análoga

$$\delta F_x = -\frac{\partial p}{\partial x} \delta x \delta y \delta z$$

y

$$\delta F_z = -\frac{\partial p}{\partial z} \delta x \delta y \delta z - \gamma \delta x \delta y \delta z.$$

El vector elemental de fuerza  $\delta \vec{F}$  resulta por lo tanto

$$\delta \vec{F} = -\left(\frac{\partial p}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \hat{k}\right) \delta x \delta y \delta z - \gamma \delta x \delta y \delta z \hat{k}$$

ó, por unidad de volumen,

$$\frac{\delta \vec{F}}{\delta x \delta y \delta z} = \vec{f} = -\left(\frac{\partial p}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \hat{k}\right) - \gamma \hat{k}.$$

El grupo de términos entre paréntesis representa el gradiente de la presión, el cual se abrevia utilizando el operador  $\nabla$  (nabla)

$$\nabla() = \frac{\partial()}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial()}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial()}{\partial z} \hat{k},$$

por lo que la ecuación anterior queda

$$\frac{\delta \vec{F}}{\delta x \delta y \delta z} = -\nabla p - \gamma \hat{k}.$$

Para un elemento de fluido en movimiento sin esfuerzos de corte se tendrá que

$$-\nabla p - \gamma \hat{k} = \rho \vec{a},$$

donde  $\vec{a}$  es la aceleración del elemento de fluido. Si el fluido está en reposo o en movimiento uniforme entonces  $\vec{a} = 0$  por lo que

$$-\nabla p - \gamma \hat{k} = 0.$$

Las componentes escalares de ésta ecuación son

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\gamma.$$

Estas ecuaciones nos dicen que la presión no depende de las coordenadas  $x$  e  $y$ . Por lo tanto, si nos movemos sobre un plano horizontal paralelo al plano  $x - y$  la presión no cambia siempre que haya continuidad en el fluido como se muestra en la figura 2.4. Vemos también de esta figura que la distribución de presiones es también independiente de la forma o tamaño del recipiente que contenga el líquido. La ecuación según  $\hat{k}$  puede escribirse, por lo tanto, como una ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dp}{dz} = -\gamma \tag{2.1}$$

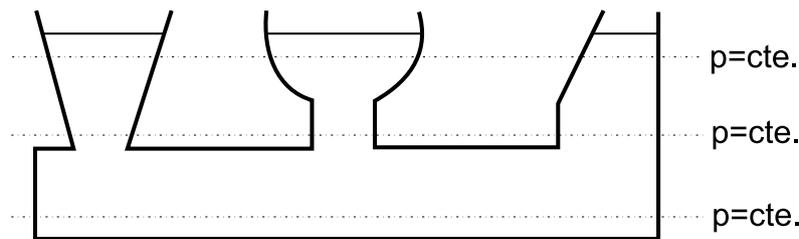


Figura 2.4: Variación de la presión hidroestática con la presión y forma del recipiente.

### Fluido incompresible

Para un fluido homogéneo e incompresible  $\gamma$  puede considerarse constante. Integrando la ecuación 2.1 entre los puntos 1 y 2 de la figura 2.5(a) se obtiene

$$p_2 - p_1 = \gamma(z_2 - z_1)$$

o

$$p_1 - p_2 = \gamma(z_2 - z_1) = \gamma h$$

$$p_1 = p_2 + \gamma h.$$

De la ecuación anterior se desprende que la presión puede ser expresada como una altura de columna de líquido

$$h = \frac{p_1 - p_2}{\gamma}$$

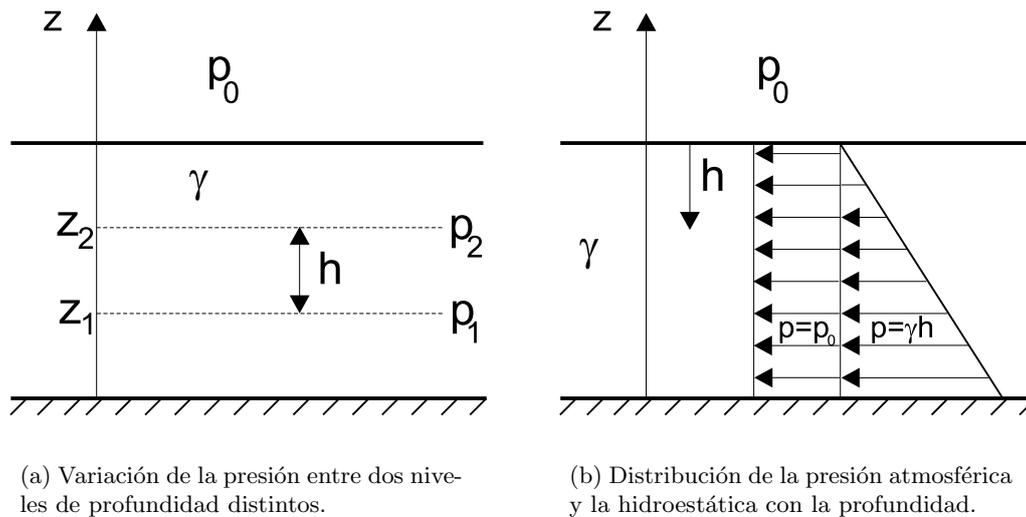


Figura 2.5: Presión hidroestática para un líquido en reposo.

$h$  representa la altura de una columna de líquido de peso específico  $\gamma$  que produce un diferencial de presión  $p_1 - p_2$ .

Cuando se tiene una superficie libre es conveniente utilizarla como plano de referencia. La presión que actúa sobre este plano de referencia se denomina presión de referencia  $p_0$ .

$$p = p_0 + \gamma h$$

donde  $h$  se mide desde la superficie libre hacia abajo como indica la figura 2.5(b).  $p$  representa en este caso la presión total o absoluta, la presión relativa resulta  $p_{\text{rel}} = p - p_0 = \gamma h$ . Vemos que la presión  $p_0$  se distribuye en forma continua mientras que la presión relativa aumenta con la profundidad. La presión total puede por lo tanto ser analizada como la superposición de una distribución uniforme de presiones de magnitud  $p_0$  y una distribución de presiones que aumenta en forma lineal con la profundidad.

### Fluido compresible

Integrando la ecuación 2.1 para gases y considerando un gas ideal en reposo, es decir que se cumple la ecuación de estado para los gases ideales, se tiene

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{gp}{RT}.$$

Separando variables e integrando

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p} = -\frac{g}{R} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{T}.$$

$$\ln \frac{p_2}{p_1} = -\frac{g}{R} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{T}.$$

Se ve que se debe explicitar como varía la temperatura del gas con la elevación. Si se supone, por ejemplo, que para el rango  $z_1, z_2$   $T = T_0 = \text{cte.}$  (condición isotérmica) se tendrá

$$p_2 = p_1 \exp \left[ -\frac{g(z_2 - z_1)}{RT_0} \right].$$

La variación de la temperatura en la atmósfera terrestre con la altura varía en los distintos estratos de ésta como indica la tabla 2.1. Para la tropósfera y hasta una altura de 11 km (valor que depende de la ubicación geográfica y de la estación del año) se puede suponer que el gradiente de temperatura es constante y dado por

$$\frac{dT}{dz} = -0.0065 K/m$$

⇒

$$T = T_0 + \beta z$$

donde  $\beta = -0.0065 K/m$ . Reemplazando y resolviendo la integral a partir del nivel  $z = 0$  donde  $p = p_{\text{atm}}$  y  $T = T_{\text{atm}}$  se obtiene

$$p = p_{\text{atm}} \left( 1 - \frac{\beta z}{T_{\text{atm}}} \right)^{g/R\beta}$$

Como una forma de standardizar los resultados de cálculos y experimentos, donde intervienen parámetros atmosféricos, se define una atmósfera standart, es decir una atmósfera para la cual se fija la temperatura, presión, densidad y otras propiedades del aire al nivel del mar ( $z = 0$ ). Existen principalmente dos definiciones que se denominan Atmósfera Normal y Atmósfera Standart. Los valores de  $T, p, \rho$  para  $z = 0$  para la Atmósfera Standart son

$$p_{\text{atm}} = 101325 Pa$$

$$T_{\text{atm}} = 15^\circ C$$

$$\rho_{\text{atm}} = 1.225 kg/m^3$$

Altura ( $z$ )	Nombre	Temperatura
0 a 11 km	Tropósfera	Decreciente con la altura de $+15^\circ C$ a $-56.5^\circ C$ .
11 a 20 km	Estratósfera	Constante a $-56.5^\circ C$ .
20 a 50 km		Creciente con la altura de $-56.5^\circ C$ a $0^\circ C$ (Inversión)
50 a 60 km		Constante en torno a $0^\circ C$
60 a 80 km		Decreciente con la altura de $0^\circ C$ a $-80^\circ C$
80 a 400 km		Creciente con la altura, sobre $1000^\circ$ a $200 km$ de altura

Tabla 2.1: Variación de la temperatura en distintos estratos de la atmósfera.

## 2.3 Fuerzas hidroestáticas sobre superficies sumergidas

Para fluidos en reposo sabemos que la fuerza resultante es perpendicular a la superficie, ya que no existen esfuerzos de corte, y que la presión aumenta en forma lineal con la profundidad. Se analizará en esta sección las fuerzas que se ejercen sobre superficies planas y curvas que se encuentran sumergidas en un fluido. Se verán además los conceptos de empuje y estabilidad en la flotación.

### 2.3.1 Superficies Planas

Para una superficie plana cualquiera, como la que se muestra en la figura 2.6, que se encuentra sumergida en un fluido e inclinada en un ángulo  $\theta$  con respecto a la horizontal, se requiere determinar la fuerza resultante, que actúa sobre la superficie, y su punto de aplicación.

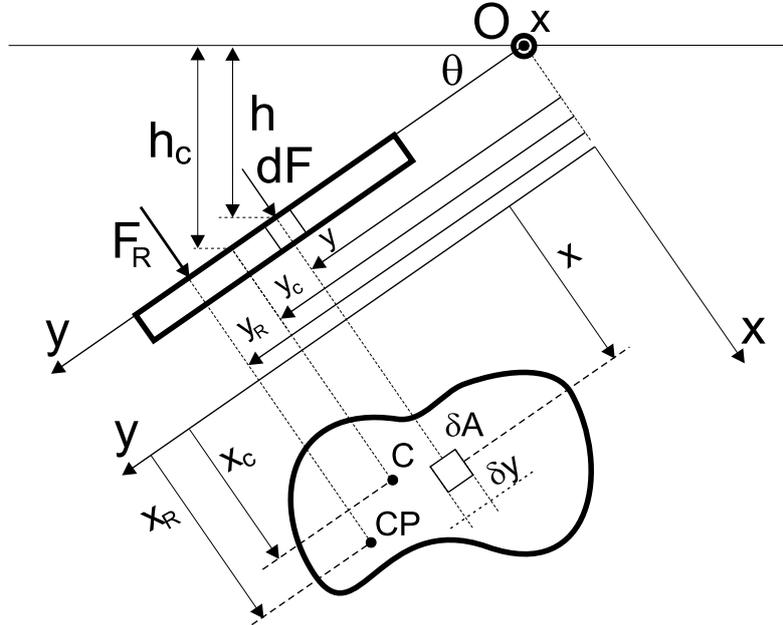


Figura 2.6: Fuerza sobre una placa plana.

A una profundidad arbitraria  $h$ , la fuerza que actúa sobre un elemento diferencial de área  $dA$  es

$$dF = \gamma h dA$$

la cual es perpendicular a la superficie. Integrando sobre toda la superficie se puede determinar la magnitud de la fuerza total o resultante  $F_R$

$$F_R = \int_A \gamma h dA = \int_A \gamma y \sin \theta dA.$$

Para valores constantes de  $\gamma$  y  $\theta$  se obtiene

$$F_R = \gamma \sin \theta \int_A y dA.$$

La integral es el momento de primer orden del área  $A$  con respecto al eje  $x$  y puede ser escrito como

$$\int_A y dA = y_c A,$$

donde  $y_c$  es la coordenada  $y$  del centroide, o centro de masa o de gravedad, medida desde el eje  $x$  que pasa por  $O$ .  $F_R$  resulta por lo tanto

$$F_R = \gamma A \underbrace{y_c \sin \theta}_{h_c} = \underbrace{\gamma h_c}_{p_c} A = p_c A.$$

Cabe hacer notar que la magnitud de la fuerza es independiente del ángulo  $\theta$  y depende sólo del peso del fluido y la profundidad del centroide del área bajo la superficie libre.

La coordenada  $y$  de la fuerza resultante,  $y_R$ , se puede determinar realizando la suma de momentos alrededor del eje  $x$

$$F_R y_R = \int_A y dF = \int_A \gamma \sin \theta y^2 dA.$$

Reemplazando el resultado anterior para  $F_R$  y reordenando se obtiene

$$y_R = \frac{\int y^2 dA}{y_c A}.$$

La integral del numerador es el momento de inercia de segundo orden<sup>1</sup>  $I_x$  con respecto al eje formado por la intersección del plano que contiene la superficie con el de la superficie libre  $x$

$\Rightarrow$

$$y_R = \frac{I_x}{y_c A}.$$

Utilizando el teorema de ejes paralelos  $I_x$  puede expresarse como

$$I_x = I_{xc} + A y_c^2,$$

donde  $I_{xc}$  es el momento de segundo orden del área  $c/r$  a un eje que pasa por el centroide y paralelo al eje  $x$ . Reemplazando se obtiene

$$y_R = \frac{I_{xc}}{y_c A} + y_c.$$

Como  $I_{xc}/y_c A > 0$ , se ve que la fuerza resultante no pasa por el centroide sino que se encuentra desplazada hacia abajo.

Análogamente para la coordenada  $x$  se obtiene

$$F_R x_R = \int_A x dF,$$

de donde

$$x_R = \frac{\int x y dA}{y_c A} = \frac{I_{xy}}{y_c A}.$$

$I_{xy}$  es el producto de inercia  $c/r$  al eje  $x$  e  $y$ . Utilizando el teorema de ejes paralelos se obtiene

$$x_R = \frac{I_{xyc}}{y_c A} + x_c.$$

---

<sup>1</sup>El momento de inercia de un área con respecto a un eje particular se define como la suma de los productos obtenidos al multiplicar cada elemento infinitesimal de ella por el cuadrado de su distancia al eje, es decir, es una función de la ubicación del área con respecto a un eje.

### 2.3.2 Superficies curvas

En superficies curvas la fuerza elemental o por unidad de área varía su dirección ya que la presión sigue siendo perpendicular a la superficie en todo punto de ésta. Si bien es posible realizar una integración a través de la superficie de las fuerzas diferenciales de presión esto puede ser muy complejo y tedioso. Es preferible separar las fuerzas en las correspondientes componentes perpendiculares. Suponiendo una superficie curva sumergida como la de la figura 2.7, donde el plano  $x - y$  es paralelo al plano de la superficie libre y el eje  $z$  es perpendicular a éste plano y apunta hacia abajo, tendremos que la fuerza sobre un elemento diferencial de área según el eje  $x$  es

$$dF_x = p dA \cos \theta .$$

$dA \cos \theta$  es la proyección del área  $dA$  sobre un plano formado por los ejes  $y - z$  perpendicular al eje  $x$ , es decir  $dA \cos \theta = dA_x$ .

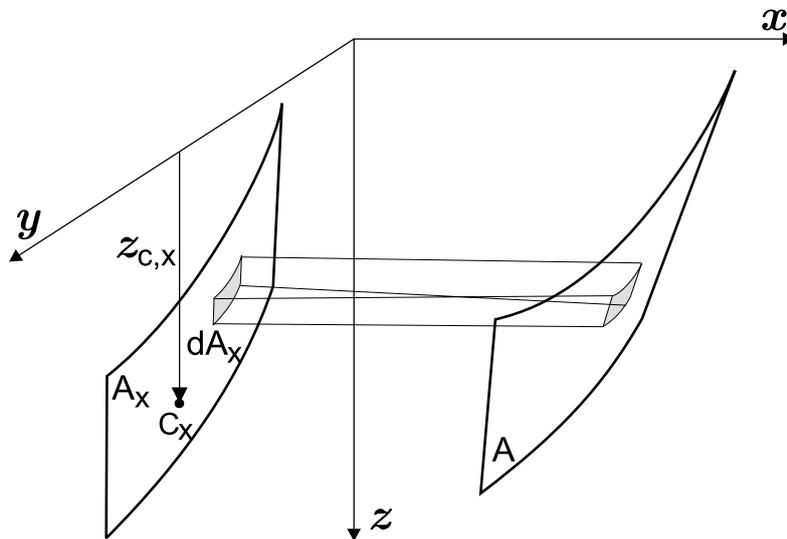


Figura 2.7: Fuerza sobre un placa curva.

⇒

$$dF_x = p dA_x = \rho g z dA_x .$$

Integrando sobre toda la superficie se tiene

$$F_x = \int dF_x = \rho g \int z dA_x .$$

El término  $\int z dA_x$  es igual al momento de primer orden de la proyección de área  $A$  sobre el plano  $y - z$  y puede ser escrito por

$$\int z dA_x = z_{c,x} A_x ,$$

donde  $z_{c,x}$  es la coordenada  $z$  del centroide de  $A_x$ . Se obtiene por lo tanto

$$F_x = \rho g z_{c,x} A_x .$$

Para  $F_y$  se obtiene análogamente

$$F_y = \rho g z_{c,y} A_y .$$

Para el eje  $z$  se obtiene

$$F_z = \rho g V$$

donde  $V$  es el volumen de líquido que se encuentra sobre la superficie. Vemos que  $F_z$  es igual al peso del líquido que se encuentra sobre la superficie. En el desarrollo anterior se omitió la presión que existe sobre la superficie libre ya que ésta actúa a ambos lados de la placa por lo que su efecto neto es nulo.

### 2.3.3 Empuje y Flotación

#### Empuje estático

Si un cuerpo está parcial o totalmente sumergido en un fluido la resultante de fuerzas causadas por la presión que actúan sobre el cuerpo se denomina fuerza de empuje o de flotación ( $E$ ). Analizando la figura 2.8 vemos que como la proyección del área sobre cualquier par de planos paralelos y opuestos es la misma, es decir  $A_{p1} = A_{p2}$ , las fuerzas según el eje  $x$  se anulan mutuamente. Lo anterior indica que la fuerza de empuje será siempre vertical. Analizando el prisma de sección transversal  $\delta A$  se tiene

$$\delta E = (p_2 - p_1) \delta A = \gamma \underbrace{h \delta A}_{\delta V} = \gamma \delta V .$$

Suponiendo que  $\gamma$  es constante se puede integrar la ecuación anterior obteniéndose

$$E = \gamma V .$$

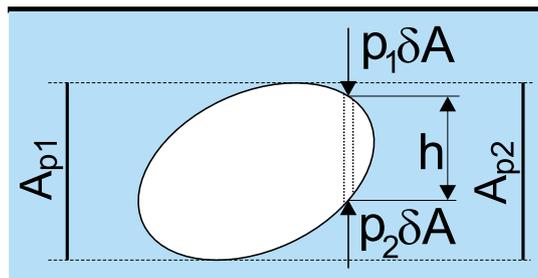


Figura 2.8: Fuerza de empuje.

Se ve que la fuerza de empuje es igual al peso del fluido desplazado por el cuerpo. Realizando un balance de momentos se determina que el punto de aplicación de la fuerza es el centro de masa o centriode del volumen del fluido desplazado

$$\bar{x} = \frac{1}{V} \int_V x dV .$$

El punto de aplicación de la fuerza de empuje se denomina también centro de presiones ( $CP$ ). Debido a la existencia del empuje un cuerpo parece perder peso al sumergirse en un fluido. Esta pérdida aparente de peso  $\Delta W$  es igual al empuje

$$\Delta W = E = \gamma V.$$

El peso aparente  $W_a$  del cuerpo sumergido es por lo tanto

$$W_a = W - \Delta W = W - E = W - \gamma V.$$

De la ecuación anterior es posible determinar el volumen de líquido desplazado  $V$

$$V = \frac{W - W_a}{\gamma}.$$

Este volumen es, para cuerpos totalmente sumergidos, igual al volumen del cuerpo, de donde es posible determinar la densidad media  $\rho_c$  de el o los materiales de que esta compuesto el cuerpo

$$\rho_c = \frac{W}{W - W_a} \rho.$$

### 2.3.4 Flotación

Si la fuerza de empuje que experimenta un cuerpo en un fluido es igual a su peso, éste flotará si parte de su volumen está sobre la superficie y se encontrará suspendido si está completamente sumergido. La condición de equilibrio es por lo tanto para ambos casos

$$E = W.$$

Si estas fuerzas son diferentes existen dos posibilidades

- a)  $E < W$  el cuerpo se hunde y
- b)  $E > W$  el cuerpo sale a flote.

### Estabilidad en la flotación

Si un cuerpo se encuentra en equilibrio, ya sea flotando o suspendido, la fuerza de empuje y el peso están aplicadas sobre una misma línea vertical. Debido a que los puntos de aplicación de la fuerza de empuje y el centro de gravedad no coinciden necesariamente, este equilibrio puede ser estable o inestable. Un cuerpo estará en equilibrio estable si al desplazarlo en forma angular éste recupera su posición original e inestable si éste se mueve a una posición distinta de la original.

Para cuerpos totalmente sumergidos, como los que se muestran en la figura 2.9, si el centro de gravedad está por debajo del centro de aplicación de la fuerza de empuje, ambas fuerzas crean un momento que tiende a restaurar la posición original del cuerpo, si éste se desplaza angularmente, es decir el equilibrio es estable si el centro de gravedad del cuerpo está por debajo del punto de aplicación de la fuerza de empuje. Si el centro de gravedad está por encima del punto de aplicación de la fuerza de empuje se crea un momento que tiende a volcar el cuerpo por lo que el equilibrio es inestable.

En cuerpos que están parcialmente sumergidos o flotando la estabilidad en la flotación puede darse incluso si el centro de gravedad está por encima del punto de aplicación de la fuerza de

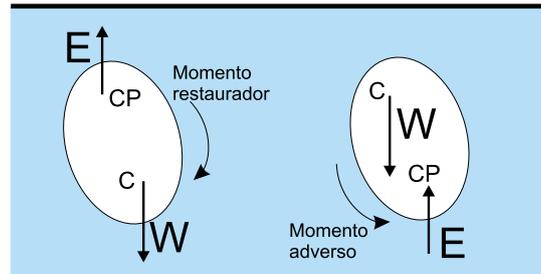


Figura 2.9: Estabilidad en la flotación para cuerpos totalmente sumergidos.

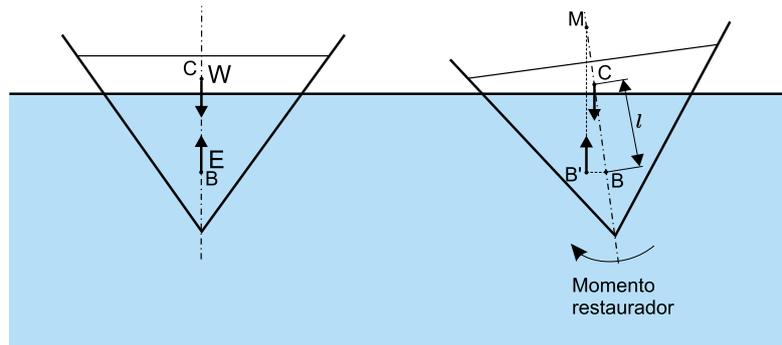


Figura 2.10: Estabilidad en la flotación de un cuerpo flotante.

empuje. Esto se debe a que el punto de aplicación de la fuerza de empuje está asociado al centro de gravedad del líquido desplazado y éste se desplaza al cambiar el volumen desplazado. Analizando la figura 2.10 vemos que el punto de aplicación del empuje cambia desde punto  $B$  a  $B'$  pero el punto de aplicación del peso se mantiene en  $C$ . Si el punto  $M$ , que se denomina Metacentro y que es el punto de intersección de una línea vertical que pasa por  $B'$  y la línea vertical original, se encuentra sobre  $C$ , se crea un momento restaurador y el cuerpo se encontrará por lo tanto en un equilibrio estable. La distancia  $MC$  se denomina altura metacéntrica. Por lo tanto si

1.  $M$  esta sobre  $C$  existe equilibrio estable.
2.  $M$  esta bajo  $C$  existe equilibrio inestable.
3.  $M$  esta en  $C$  existe equilibrio neutro.

La distancia  $MC$  se obtiene de

$$MC = \frac{\gamma I_{yy}}{W} - l.$$

## 2.4 Fluido en Movimiento

La ecuación de movimiento de un fluido que se encuentra en un movimiento tal que no existen esfuerzos de corte es

$$-\nabla p - \gamma \hat{k} = \rho \vec{a}.$$

Esta ecuación se cumplen cuando el fluido está en movimiento, lineal o rotatorio, tal como si fuera un cuerpo rígido. Las componentes de esta ecuación, para un sistema cartesiano y suponiendo  $\hat{k}$  vertical hacia arriba, son

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho a_x$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} = \rho a_y$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = \gamma + \rho a_z.$$

La superficie libre generada es una superficie de equilibrio, por lo que la fuerza total ejercida sobre las partículas de fluido es normal a la superficie en todo punto de ésta. Lo anterior indica, y dada la curvatura terrestre, que la superficie que se genera sobre un líquido que sólo esta sometido a la aceleración de gravedad tiene la forma de un casquete esférico. Este fenómeno es, sin embargo, despreciable a escalas pequeñas, donde se puede considerar que la superficie es plana, y sólo es posible de apreciar en superficies muy grandes como los océanos.

Considerando el recipiente de la figura 2.11, el cual está sometido a una aceleración constante  $\vec{a} = a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$  con  $a_y = a \cos \alpha$  y  $a_z = a \sin \alpha$ . El diferencial de presión en un pto cualquiera  $y, z$  es

$$dp = \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz.$$

Reemplazando

$$dp = -\rho a_y dy - \rho(g + a_z)dz.$$

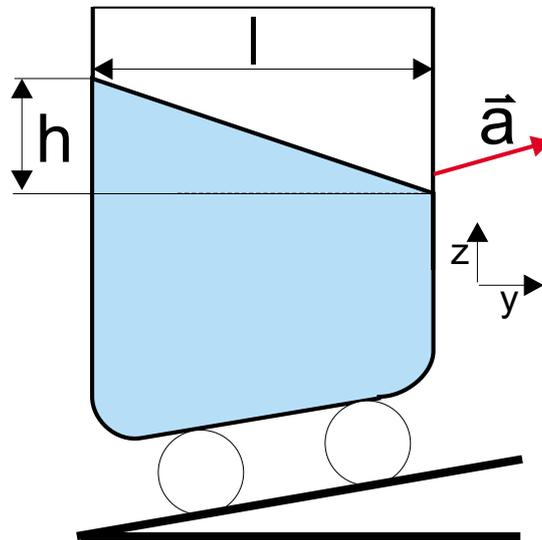


Figura 2.11: Líquido sometido a una aceleración lineal constante.

Esta ecuación se puede integrar conociendo la presión  $p_0$  en un punto. A lo largo de una línea de presión constante, como la superficie libre por ejemplo, se tiene que  $dp = 0$  por lo que

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{a_y}{g + a_z} = -\frac{a \cos \alpha}{g + a \sin \alpha}$$

o

$$\tan \beta = \frac{a \cos \alpha}{g + a \sin \alpha},$$

donde  $\beta$  es el ángulo que adquiere la superficie libre y las superficies isobáricas del líquido. Se ve que la presión varía en forma hidroestática en el líquido. La variación en altura  $h$  que adquiere el líquido entre un extremo y otro del recipiente se puede obtener de

$$h = l \cdot \tan \beta = l \frac{a \cos \alpha}{g + a \sin \alpha},$$

donde  $l$  es el ancho del recipiente.

Para el caso particular de una aceleración horizontal, es decir  $\alpha = 0$  se obtiene

$$\tan \beta = \frac{a}{g}.$$

Si el fluido se encuentra en un movimiento vertical ( $a_y = 0$ ) no habrá inclinación y

$$\frac{dp}{dz} = -\rho(a_z + g).$$

Se ve que la presión varía en este caso en forma lineal con la profundidad pero bajo la acción combinada de  $a_z$  y  $g$ . Si el fluido cae en caída libre entonces  $a_z = -g$  y se tendrá

$$\frac{dp}{dz} = 0$$

de donde vemos que la presión será, en todo el líquido, igual a la presión que rodea el fluido.

Analizaremos ahora el caso de un fluido que se encuentra en un recipiente el cual gira con una velocidad angular constante  $\omega$  como se muestra en la figura 2.12. Dado que estamos suponiendo que no hay movimiento relativo entre las partículas del fluido, cada partícula de fluido tendrá la velocidad angular  $\omega$  y el líquido se estará moviendo como un bloque. La aceleración de una partícula situada a una distancia  $r$  del eje tendrá una aceleración  $r\omega^2$  en dirección radial. Utilizando coordenadas cilíndricas tenemos

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{\partial p}{\partial z} \hat{k}$$

y

$$a_r = -r\omega^2,$$

$$a_\theta = 0,$$

$$a_z = 0.$$

De la ecuación de movimiento obtenemos

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -r\omega^2,$$

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0,$$

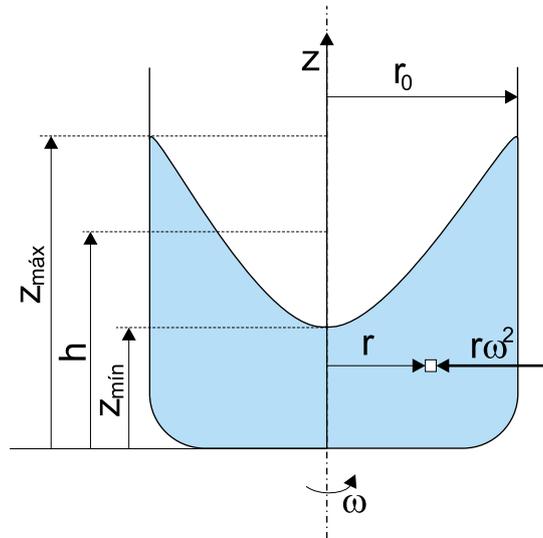


Figura 2.12: Líquido sometido a una velocidad angular  $\omega$  constante.

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\gamma.$$

El diferencial de presión resulta por lo tanto

$$dp = \frac{\partial p}{\partial r} dr + \frac{\partial p}{\partial z} dz$$

$$dp = \rho r \omega^2 dr - \gamma dz.$$

Integrando esta ecuación se obtiene

$$p = \frac{\rho \omega^2}{2} r^2 - \gamma z + \text{cte.}$$

Se ve que la presión varía con la distancia al eje y que para un radio constante la presión varía en forma hidrostática en la dirección vertical. Las superficies isobáricas se obtienen de la condición  $dp = 0$

$\Rightarrow$

$$\frac{dz}{dr} = \frac{r \omega^2}{g}$$

de donde la ecuación de la superficie resulta

$$z = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + \text{cte.}$$

Vemos que las superficies isobáricas, y por lo tanto la superficie libre, tiene la forma de un paraboloide de revolución o en dos dimensiones una parábola. Se puede ver además que la forma de la curva es independiente del fluido. El valor de la constante se puede determinar de la condición para  $r = 0$  donde  $z = z_{\min} \Rightarrow \text{cte} = z_{\min}$ .

$$z = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + z_{\min}.$$

La ecuación anterior se puede expresar en función del nivel del líquido en reposo  $h$  por la siguiente relación

$$z = h + \frac{\omega^2}{4g}(2r^2 - r_0^2)$$

de donde

$$z_{\min} = h - \frac{\omega^2 r_0^2}{4g}$$

y

$$z_{\max} = h + \frac{\omega^2 r_0^2}{4g}.$$