Capítulo 3

Cinemática de Fluidos

La cinemática estudia varios aspectos de un fluido en movimiento como velocidad, posición y aceleración sin analizar las fuerzas necesarias para que se produzca dicho movimiento.

En una primera parte describiremos el movimiento en términos del movimiento de una partícula fluida y posteriormente se realizara un análisis macroscópico para la descripción de un flujo.

La descripción de cualquier propiedad del fluido puede ser descrita como una función de su posición. En particular se utilizan coordenadas espaciales (x, y, z por ejemplo) para identificar las partículas de fluido y sus propiedades. Esta representación se denomina representación de campo. Así por ejemplo, el campo de velocidades vendrá dado por $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z)$. Como la representación de una partícula puede ser diferente en tiempos diferentes la representación debe ser también una función del tiempo. Para el campo de temperaturas y velocidades por ejemplo

$$T = T(x, y, z, t)$$

$$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)$$

$$\vec{V} = u(x, y, z, t)\hat{\imath} + v(x, y, z, t)\hat{\jmath} + w(x, y, z, t)\hat{k}$$

El movimiento de una partícula puede ser descrito en términos de la velocidad y la aceleración. Por definición la velocidad de una partícula es la variación temporal del vector posición

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}\,.$$

La rapidez es el módulo de la velocidad $|\vec{V}|$. Si las propiedades de un flujo, en todos los puntos del espacio, permanecen invariantes en el tiempo, se dice que el flujo es permanente. En caso contrario se llama no–permanente. Un campo de velocidades permanente estará dado por

$$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z)\,.$$

Para el caso permanente se cumple ($\partial/\partial t = 0$).

Como se mencionó anteriormente las propiedades de un fluido y las características del flujo se pueden representar como una función de la posición y del tiempo. Se desprende de lo anterior dos formas de posibles de representación:

1. La primera, utiliza el concepto de campo mencionado anteriormente. La descripción del flujo está dada por la descripción de las propiedades de éste como una función de la posición

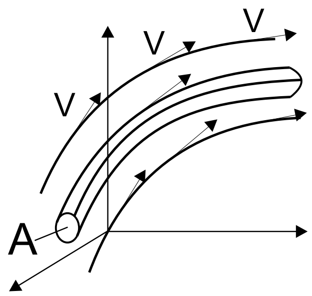
y del tiempo. De esta manera se obtiene información del flujo en términos de qué pasa en un punto fijo del espacio en un tiempo t cuando el flujo pasa por él. Este método de descripción se denomina descripción Euleriana. La velocidad queda representada por el campo de velocidades dado por

$$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)\,.$$

2. El segundo método, denominado Lagrangiano, analiza una partícula genérica del flujo para analizar y caracterizar el flujo. En esta representación la posición x, y, z no son fijas sino varían en el tiempo. Las coordenadas espaciales serán por lo tanto funciones del tiempo y de una posición preescrita x_o, y_o, z_o en un instante t_o. Para la velocidad se tiene por lo tanto

$$\vec{V} = \vec{V}(x(t), y(t), z(t), t)\,.$$

Para representar el flujo en forma gráfica se utiliza el concepto de línea de corriente. Las líneas de corriente son las envolventes de los vectores de velocidad de las partículas fluidas, es decir, el vector de velocidad es siempre tangente a las líneas de corriente. Si el flujo es permanente ($\partial/\partial t = 0$) las líneas de corriente estarán fijas en el tiempo y coincidirán con la trayectoria de las partículas. Si el flujo no es permanente ($\partial/\partial t \neq 0$) las líneas de corriente serán solo una representación instantánea del flujo.



Líneas y tubo de corriente

Se llama tubo de corriente al conjunto de líneas de corriente que pasan por el contorno de un área A, en un tiempo determinado. Dado que la velocidad es tangente a las líneas de corriente, no existirá flujo a través del manto de un tubo de corriente por lo que se cumple que

$$\vec{V} \times d\vec{r} = 0\,,$$

donde $d\vec{r}$ es el desplazamiento diferencial de una partícula fluida que tiene una velocidad $\vec{V}$. De la ecuación anterior resulta

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}\,, \tag{3.1}$$

que representan las ecuaciones para determinar las líneas de corriente.

3.1 Velocidad, Rotación, Deformación

Como se menciono en el capítulo 1 un fluido es una substancia que se deforma al aplicar sobre ésta un esfuerzo de cizalle. Debemos esperar por lo tanto que una partícula fluida se encuentre sometida a movimientos de traslación, rotación, deformación lineal y angular como se muestra en la figura 3.1. Este tipo de movimientos esta asociado a variaciones complejas de las diferentes componentes de la velocidad (u, v, w) en todas las direcciones. Lo anterior nos indica que, en general, $(\partial V_i/\partial x_j) \neq 0 \ \forall i, j$. Analizaremos ahora cada uno de estos efectos por separado y su relación con la variación de la velocidad según los distintos ejes coordenados.

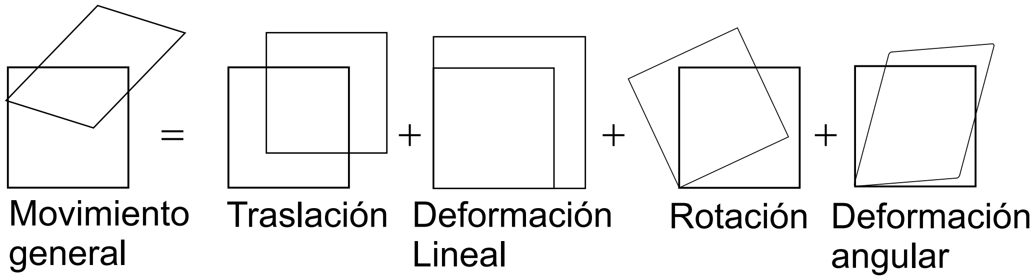


Figura 3.1: Superposición de movimientos de una partícula fluida.

Traslación.

El movimiento mas sencillo al cual se puede encontrar sometida una partícula fluida es el movimiento de traslación. En la figura 3.2 se muestra una partícula que viaja con una velocidad constante desplazándose desde su posición original una nueva posición dada por los puntos $O'A'C'B'$.

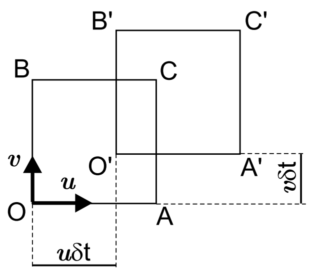


Figura 3.2: Movimiento de traslación de una partícula fluida.

Deformación lineal.

Analizaremos la deformación lineal según el eje x, como se muestra en la figura 3.3. Nos interesa por lo tanto analizar la variación de la velocidad según el mismo eje, es decir $(\partial u/\partial x)$. Como se muestra en ésta figura, y debido a la diferencia de velocidad existente entre las líneas OB y AC el elemento de fluido se deforma en un tiempo δt. La variación del volumen resulta

$$\delta V = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\delta x\right)\delta y \delta z \delta t\,.$$

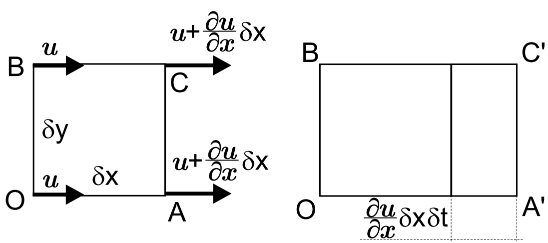


Figura 3.3: Deformación lineal de una partícula fluida.

El cambio de volumen en el tiempo por unidad de volumen y tiempo es

$$\frac{1}{V}\frac{d(\delta V)}{\delta t} = \lim_{\delta t \to 0}\left[\frac{(\partial u/\partial x)\delta t}{\delta t}\right] = \frac{\partial u}{\partial x}\,.$$

El cambio de volumen, por unidad de volumen, según todos los ejes es la superposición de los cambios según cada eje y por lo tanto igual a

$$\frac{1}{V}\frac{d(\delta V)}{\delta t} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla\cdot\vec{V}\,.$$

Vemos como la divergencia de la velocidad, $\nabla\cdot\vec{V}$, se encuentra asociada a la deformación lineal de la partícula fluida. Como un cambio de volumen a masa constante significa una variación de la densidad, se debe cumplir que

$\nabla\cdot\vec{V} = 0$ para un flujo incompresible y

$\nabla\cdot\vec{V} \neq 0$ para un flujo compresible.

Rotación.

La velocidad angular de la línea OA, Ω_{OA}, de la figura 3.4 queda definida por

$$\Omega_{OA} = \lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta\alpha}{\delta t}\,.$$

Para $\delta\alpha$ pequeños y de la figura se tiene que

$$\tan\alpha \approx \delta\alpha = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}\delta x\delta t}{\delta x} = \frac{\partial v}{\partial x}\delta t\,,$$

$\Rightarrow$

$$\Omega_{OA} = \frac{\partial v}{\partial x}\,.$$

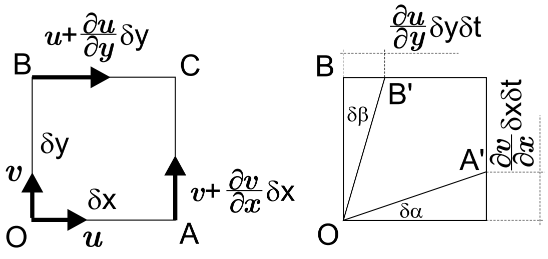


Figura 3.4: Rotación de una partícula fluida.

Análogamente la velocidad angular de la linea OB, Ω_{OB}, resulta

$$\Omega_{OB} = \lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta\beta}{\delta t} = \frac{\partial u}{\partial y}\,.$$

La velocidad angular en torno al eje z, Ω_z, se define como el promedio aritmético de Ω_{OA} y Ω_{OB}, es decir

$$\begin{aligned} \Omega_z &= \frac{1}{2}\left(\Omega_{OA} + \Omega_{OB}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) . \end{aligned} \tag{3.2}$$

Se puede observar de la ecuación 3.2 que la partícula fluida rotará en torno al eje z como un cuerpo rígido, es decir sin deformación, sólo si $\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$. En otro caso la rotación estará asociada a una deformación. Se ve además que cuando $\partial u/\partial y = \partial v/\partial x$ la rotación en torno al eje z es cero.

Para los otros ejes se obtiene

$$\Omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) ,$$

$$\Omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) .$$

De las ecuaciones anteriores se puede ver que

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\nabla \times \vec{V} .$$

Un flujo para el cual $\nabla \times \vec{V} = 0$ se llama irrotacional y representa un tipo especial de flujo como se vera mas adelante.

La vorticidad $\vec{\omega}$ de un flujo se define como

$$\vec{\omega} = 2\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{V} .$$

Deformación angular.

Se ve de la figura 3.4 que las derivadas $\partial u/\partial y$ y $\partial v/\partial x$ pueden causar, además de la rotación de la partícula, una deformación. La tasa de deformación angular de una partícula se mide por la rapidez de cambio del ángulo que se forma entre las líneas OA y OB. Si OA gira a un velocidad angular distinta a OB la partícula se esta deformando. Para el plano xy de la figura la deformación ϵ_{xy} resulta

$$\begin{aligned} \epsilon_{xy} &= \frac{1}{2}\left(\Omega_{OA} - \Omega_{OB}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) . \end{aligned}$$

La deformación se representa mediante un tensor de deformación, $\bar{\bar{\epsilon}}$, cuya componente genérica ϵ_{ij} está dada por

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) .$$

Las componentes de la diagonal de éste tensor representan la deformación lineal por compresión y/o tracción en los distintos ejes vista anteriormente y esta dada por

$$\epsilon_{ii} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i}\,.$$

Se verá mas adelante cómo este tensor de esfuerzos está relacionado con los esfuerzos normales y de corte.

Velocidad

Haciendo un desarrollo de Taylor del campo de velocidades y despreciando los término de orden 2 y superiores se obtiene

$$v_i(\vec{x},t) = v_i(\vec{x}_o,t) + \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)_{\vec{x}_o} \Delta x_i \;\forall i,j\,.$$

El primer término del lado derecho de la ecuación anterior representa la traslación por lo que el segundo debe representar la rotación y la deformación. En forma matricial la ecuación anterior queda

$$\begin{pmatrix} u(\vec{x}) \\ v(\vec{x}) \\ w(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(\vec{x}_o) \\ v(\vec{x}_o) \\ w(\vec{x}_o) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial u/\partial x & \partial u/\partial y & \partial u/\partial z \\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y & \partial v/\partial z \\ \partial w/\partial x & \partial w/\partial y & \partial w/\partial z \end{pmatrix}_{\vec{x}_o} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}.$$

La matriz $\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)_{\vec{x}_o}$ se puede dividir en dos matrices, una antisimétrica, que representa la rotación, y otra simétrica, que representa la deformación, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \partial u/\partial x & \partial u/\partial y & \partial u/\partial z \\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y & \partial v/\partial z \\ \partial w/\partial x & \partial w/\partial y & \partial w/\partial z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) & 0 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

La velocidad de un fluido queda, por lo tanto, de la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} u(\vec{x}) \\ v(\vec{x}) \\ w(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(\vec{x}_o) \\ v(\vec{x}_o) \\ w(\vec{x}_o) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} + \bar{\bar{\epsilon}} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}.$$

Recordando los resultados de la mecánica del sólido, donde sólo se consideran movimientos de traslación y rotación, la velocidad esta dada por

$$\vec{V}_{\vec{x}} = \vec{V}_{\vec{x}_o} + \vec{\Omega} \times \vec{r}\,,$$

donde $\vec{\Omega}$ es el vector de velocidad angular. En forma matricial esta ecuación queda

$$\begin{pmatrix} u(\vec{x}) \\ v(\vec{x}) \\ w(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(\vec{x}_o) \\ v(\vec{x}_o) \\ w(\vec{x}_o) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}.$$

Vemos que este resultado es un caso particular de la ecuación para un fluido donde no existe deformación.

3.2 Aceleración

La velocidad de una partícula cualquiera será una función de la posición asi como del tiempo

$$\vec{V} = \vec{V}(\vec{r}, t)\,.$$

La aceleración $\vec{a}$ es la variación temporal de la velocidad

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{V}(\vec{r}, t) = \frac{d}{dt}\vec{V}(x, y, z, t)\,.$$

Aplicando la regla de la cadena se obtiene

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x}\underbrace{\frac{\partial x}{\partial t}}_{u} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y}\underbrace{\frac{\partial y}{\partial t}}_{v} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}\underbrace{\frac{\partial z}{\partial t}}_{w} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

$$\vec{a} = \underbrace{\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial x}\,u + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y}\,v + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}\,w\right)}_{\substack{\text{aceleración}\\ \text{convectiva}}} \quad + \quad \underbrace{\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}\right)}_{\substack{\text{aceleración}\\ \text{local}}} \quad .$$

Se ve que existen dos efectos superpuestos en la aceleración:

- Aceleración local: representa la variación de la velocidad de una partícula en la posición ocupada por esta, es decir, representa los efectos no permanentes existentes en un flujo.
- Aceleración convectiva: representa el hecho de que una propiedad asociada a una partícula fluida puede cambiar debido al movimiento de ésta de un punto en el espacio a otro.

Las componentes escalares de esta ecuación son

$$a_x = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\,u + \frac{\partial u}{\partial y}\,v + \frac{\partial u}{\partial z}\,w\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\,,$$

$$a_y = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\,u + \frac{\partial v}{\partial y}\,v + \frac{\partial v}{\partial z}\,w\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)\,,$$

$$a_w = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\,u + \frac{\partial w}{\partial y}\,v + \frac{\partial w}{\partial z}\,w\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)\,.$$

La ecuación para la aceleración puede escribirse de la siguiente forma

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \underbrace{\left(\vec{V}\cdot\nabla\right)}_{\text{operador}}\,\vec{V}\,.$$

$\left(\vec{V} \cdot \nabla\right)$ es un operador matemático, que en el caso de la ecuación anterior se encuentra operando sobre la velocidad $\vec{V}$. De lo anterior se puede decir que

$$\frac{\partial()}{\partial t} + \left(\vec{V} \cdot \nabla\right)()$$

es también un operador que opera sobre la velocidad. Este operador se denomina derivada material, sustancial o total y se representa por

$$\frac{D()}{Dt}\,.$$

$\Rightarrow$

$$\vec{a} = \frac{D(\vec{V})}{Dt}\,.$$

El concepto de derivada total es aplicable a distintos parámetros del flujo y no solo a la aceleración. Para la temperatura $T(x, y, z, t)$ por ejemplo, que se diferencia de la velocidad por ser un campo escalar, la derivada total resulta

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla T$$

y para la presión $p(x, y, z, t)$

$$\frac{Dp}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla p$$

donde vemos que el operador ∇ opera primero sobre el campo escalar.

3.3 Sistemas y Volúmenes de Control

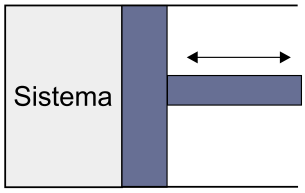
Como cualquier materia el comportamiento de un fluido es gobernado por un set de leyes físicas fundamentales, las cuales son expresadas por relaciones matemáticas. Las ecuaciones básicas que gobiernan el movimiento de un fluido son

- Conservación de la masa
- Segunda ley de movimiento de Newton (cantidad de movimiento)
- Conservación de la energía
- Segundo principio de la termodinámica

Además de estas leyes fundamentales existen relaciones secundarias como ecuaciones de estado, dependencias de propiedades del fluido con la temperatura, etc.

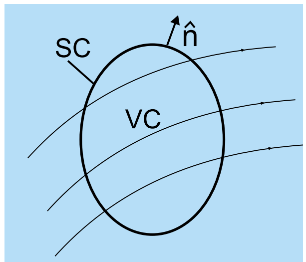
Análogamente a lo que se vió para la descripción del movimiento de una partícula la aplicación de estas leyes pueden ser aplicadas a un fluido principalmente mediante los conceptos de Sistema o Volúmenes de Control.

Un Sistema es una cantidad de materia fija e identificable, la cual puede cambiar de forma y tamaño pero no en la cantidad de masa. Las ecuaciones se deben satisfacer para todas las partículas del sistema. La descripción mediante Volúmenes de Control (VC) considera un volumen en el espacio (independiente de la masa) a través del cual fluye el fluido. Las ecuaciones deben cumplirse en este caso para el volumen de control. La superficie que encierra el volumen de control se denomina superficie de control (SC). Por convenio se define el vector normal a la superficie de control positivo hacia el exterior del volumen.



Sistema

Se ve que un sistema es equivalente a la descripción Lagrangiana del flujo y el Volumen de Control a la descripción Euleriana. En el límite cuando el sistema y el volumen de control son infinitesimales ambas descripciones deben coincidir. Es por lo tanto de gran utilidad encontrar una relación que nos permita cambiar entre estos dos tipos de representación. Consideramos para este efecto el análisis de la variación de un parámetro N de un flujo que tiene un campo de velocidades $\vec{V}$ medido c/r a un sistema coordenado $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$. Sea η la cantidad de N por unidad de masa[1], es decir, $N = \eta\, m$ o $N = \eta\, \rho\, V$ donde m es la masa, ρ la densidad y V el volumen. En forma infinitesimal esta relación es $\delta N = \eta\rho\delta V$. Se verifica por lo tanto que



Volumen de Control

$$N = \int_V \eta\rho dV\,.$$

Para encontrar la relación deseada suponemos un volumen de control y un sistema coincidentes en $t = t$. En un tiempo $t = t + \delta t$ el sistema se desplaza con el flujo y el volumen de control queda fijo en el espacio como se muestra en la figura 3.5. La variación de N en el sistema queda expresada por

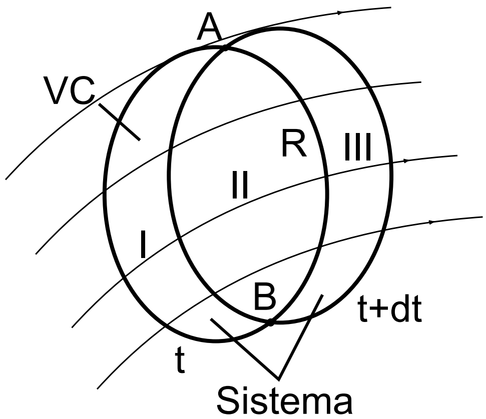


Figura 3.5: Volumen de Control y Sistema en t y $t + dt$.

[1]Cualquier parámetro que es dependiente de la masa se dice que es un parámetro extensivo. Un parámetro que es independiente de la masa se dice intensivo.

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{dN}{dt}\right)_{\text{Sistema}} &= \frac{d\left(\int\limits_V \eta\rho dV\right)_{\text{S}}}{dt} = \left(\frac{DN}{Dt}\right)_{\text{S}} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\left(\int\limits_{III} \eta\rho dV + \int\limits_{II} \eta\rho dV\right)_{t+\Delta t} - \left(\int\limits_{I} \eta\rho dV + \int\limits_{II} \eta\rho dV\right)_{t}}{\Delta t}\right]
\end{aligned}
$$

Reordenando adecuadamente se obtiene

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{DN}{Dt}\right)_{\text{S}} &= \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\left(\int\limits_{II} \eta\rho dV\right)_{t+\Delta t} - \left(\int\limits_{II} \eta\rho dV\right)_{t}}{\Delta t}\right] \\
&+ \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\left(\int\limits_{III} \eta\rho dV\right)_{t+\Delta t}}{\Delta t}\right] - \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\left(\int\limits_{I} \eta\rho dV\right)_{t}}{\Delta t}\right]
\end{aligned}
$$

Cuando $\Delta t \to 0$ el volumen II tiende al volumen seleccionado como volumen de control, por lo que en el límite se tendrá

$$
\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\left(\int\limits_{II} \eta\rho dV\right)_{t+\Delta t} - \left(\int\limits_{II} \eta\rho dV\right)_{t}}{\Delta t} = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{VC} \eta\rho dV
$$

El segundo término representa la cantidad de N que atraviesa la superficie delimitada por ARB. Si $\Delta t \to 0$ la relación se transforma por lo tanto en el flujo de N por la superficie ARB. El tercer término representa análogamente la cantidad de N que entra en el volumen de control.

⇒Los dos últimos términos dan el flujo neto de N, por unidad de tiempo, que atraviesa por la superficie de control.

El flujo de masa a través de dA es $\rho\vec{V} \cdot d\vec{A}$. Multiplicando por η se obtiene

$$
\eta\left(\frac{\text{unidades de N}}{\text{masa}}\right)\rho\vec{V} \cdot d\vec{A}\left(\frac{\text{masa}}{\text{unidad de tiempo}}\right)
$$

que representa el flujo de N por unidad de tiempo que pasa a través de dA. El flujo neto de N que pasa a través de la superficie de control es por lo tanto

$$
\int\limits_{SC} \eta\left(\rho\vec{V} \cdot d\vec{A}\right)
$$

$\Rightarrow$

$$\left(\frac{DN}{Dt}\right)_{\mathrm{S}} = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{VC} \eta\rho dV + \int\limits_{SC} \eta\left(\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}\right)$$

Esta ecuación, que relaciona la variación temporal de un parámetro N de un flujo en un sistema y un volumen de control, se denomina **Teorema de transporte de Reynolds**.

Análogamente al caso de la derivada total, el teorema de transporte de Reynolds esta formado por un término que involucra una derivada c/r al tiempo, que representa los efectos no permanentes dentro del volumen de control, y un término espacial que representa los efectos convectivos asociados al flujo del sistema a través de la superficie de control.

$$\left(\frac{DN}{Dt}\right)_{\mathrm{S}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{VC} \eta\rho dV}_{\substack{\text{variación no}\\ \text{permanente}}} + \underbrace{\int\limits_{SC} \eta\left(\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}\right)}_{\substack{\text{variación}\\ \text{convectiva}}}$$

Si el flujo es permanente ($\partial/\partial t = 0$)

$$\left(\frac{DN}{Dt}\right)_{\mathrm{S}} = \int\limits_{SC} \eta\left(\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}\right)$$

En el desarrollo anterior se supuso que el volumen de control estaba fijo c/r a la referencia $(\hat{\imath},\hat{\jmath},\hat{k})$ por lo que $\vec{V}$ se mide c/r al volumen de control $\Rightarrow DN/dt$ es un efecto observado desde el volumen de control, por lo que todas las velocidades y derivadas c/r al tiempo son c/r al volumen de control.

Si el volumen de control se encuentra en movimiento con una velocidad uniforme $\vec{V}_{VC}$ la velocidad que se debe utilizar, el en teorema de transporte de Reynolds, es la velocidad relativa al volumen de control. Si $\vec{V}$ es la velocidad del flujo, c/r a un sistema de referencia fijo, entonces la velocidad relativa al volumen de control será $\vec{W} = \vec{V} - \vec{V}_{VC} \Rightarrow$

$$\left(\frac{DN}{Dt}\right)_{\mathrm{S}} = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{VC} \eta\rho dV + \int\limits_{SC} \eta\left(\rho\vec{W}\cdot d\vec{A}\right)$$

3.4 Conservación de la masa / Ecuación de Continuidad

El principio de conservación de la masa dice que para un sistema la cantidad de masa m no varía. Matemáticamente esto se expresa por

$$\left(\frac{Dm}{Dt}\right)_{\mathrm{S}} = 0$$

Aplicando el teorema de transporte de Reynolds tenemos que la propiedad extensiva es la masa m y la propiedad intensiva es igual a la unidad $\Rightarrow$

$$N = m$$

$$\eta = 1$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{VC}\rho dV + \int\limits_{SC}\left(\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}\right) = 0 \tag{3.3}$$

o

$$\int\limits_{SC}\left(\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{VC}\rho dV\,. \tag{3.4}$$

Esta ecuación nos dice que la cantidad de masa que pasa por la superficie de control es igual a la disminución por unidad de tiempo de la masa que ocupa el volumen de control.

Si el flujo es permanente ($\partial/\partial t = 0$) se tiene

$$\int\limits_{SC}\left(\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}\right) = 0\,,$$

es decir, la masa que entra al volumen de control es igual a la masa que sale.

El término $\rho\,\vec{V}\cdot d\vec{A}$ representa el flujo másico a través de dA. El flujo másico a través de una superficie cualquiera A es

$$\dot{m} = \int\limits_{A}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}\ \ [kg/s].$$

El término $\vec{V}\cdot d\vec{A}$ es el flujo volumétrico a través de dA. El flujo volumétrico que pasa a través de una superficie cualquiera A se denomina caudal Q y es

$$Q = \int\limits_{A}\vec{V}\cdot d\vec{A}\,[m^3/s].$$

Si la densidad es constante en el área de integración se tiene que

$$\dot{m} = \int\limits_{A}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = \rho\int\limits_{A}\vec{V}\cdot d\vec{A} = \rho\,Q.$$

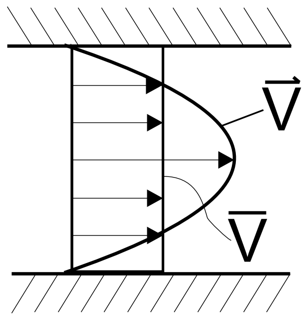
Se define la velocidad media como la velocidad que tendría el flujo en una sección de paso dada A, si es perfil de velocidades fuera constante y el flujo másico se mantuviera, es decir

$$\bar{V} = \frac{\int\limits_{A}\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}}{\rho\,A} = V$$

$\Rightarrow$

$$Q = \bar{V}\,A$$

$$\dot{m} = \rho\,Q = \rho\,\bar{V}\,A$$



Velocidad media

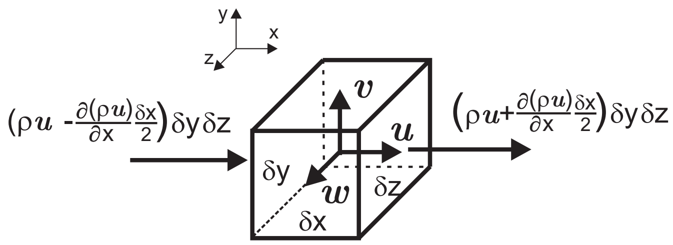


Figura 3.6: Volumen de Control diferencial.

Volumen diferencial

Si se considera ahora un volumen diferencial como el de la figura 3.6 y aplicamos la ecuación de continuidad obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{VC} \rho dV = \frac{\partial \rho}{\partial t}\delta_x \delta_y \delta_z$$

y analizando el plano yz se tiene que el flujo neto en dirección $\hat{\imath}$ a través de la superficie es

$$\frac{\partial \rho\, u}{\partial x}\delta_x \delta_y \delta_z$$

Para los otros planos se obtiene análogamente

$$\frac{\partial \rho\, v}{\partial y}\delta_x \delta_y \delta_z$$

$$\frac{\partial \rho\, w}{\partial z}\delta_x \delta_y \delta_z$$

Reemplazando todo en la ecuación de continuidad y reoordenando se obtiene

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho\, u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho\, v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho\, w)}{\partial z} = 0$$

Esta ecuación es la forma diferencial de la ecuación de continuidad o de conservación de masa. Utilizando ecuación vectorial se puede escribir de la siguiente manera

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{V} = 0$$