Capítulo 11

Flujo Compresible

En éste capítulo se considerarán los efectos de la compresibilidad del fluido sobre las características del flujo. Los efectos de la compresibilidad se ven reflejados por ejemplo en una variación brusca de las propiedades del fluido, como por ejemplo la densidad y la presión, aceleración del flujo en ductos divergentes, etc.. Dado que los efectos de la compresibilidad de los líquidos son despreciables en comparación a los efectos de la compresibilidad de los gases se considerará sólo el flujo de gases. Además se supondrá que los gases se comportan como gases ideales.

11.1 Relaciones termodinámicas para un gas ideal

Dado que una variación de la densidad esta asociada a una diferencia o variación de la temperatura y/o la presión será necesario utilizar en el análisis las distintas relaciones termodinámicas existentes para un gas ideal.

Ecuación de estado. La ecuación de estado para un gas ideal es

$$pv = p\frac{1}{\rho} = RT$$

$$p = \rho RT$$

donde p es la presión, ρ la densidad, T la temperatura absoluta y R la constante del gas que se obtiene de

$$R = \frac{R_G}{M}$$

donde R_G es la constante universal de los gases y M el peso molecular del gas.

Energía interna. Para un gas perfecto la energía interna específica u es una función solo de la temperatura, es decir, $u = u(T)$. Diferenciando u y suponiendo que la temperatura T y el volumen específico v como variables de estado para representar u se obtiene

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v dT + \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T dv$$

de donde para un gas ideal

$$\frac{du}{dT} = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v .$$

El calor específico a volumen constante C_v se define como

$$C_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v \overset{\substack{\text{gas}\\ \text{ideal}\\ \downarrow}}{=} \frac{du}{dT} .$$

Integrando la ecuación anterior entre dos puntos es posible determinar la variación de la energía interna u debida a una cambio de temperatura

$$u_2 - u_1 = C_v(T_2 - T_1) .$$

Para gases reales se cumple que C_v es una función de la temperatura, es decir, $C_v = C_v(T)$.

Entalpía. La entalpía específica h se define como

$$h = u + pv .$$

Para un gas ideal o perfecto se cumple que $u = u(T)$. Introduciendo la ecuación de estado en la ecuación anterior se obtiene

$$h = u(T) + RT = h(T) ,$$

de donde es posible apreciar que la entalpía de un gas ideal es solo función de la temperatura, es decir, $h = h(T)$. El calor específico a presión constante C_p se define como

$$C_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p \overset{\substack{\text{gas}\\ \text{ideal}\\ \downarrow}}{=} \frac{dh}{dT} .$$

Al igual que para la energía interna, la relación anterior se puede utilizar para determinar el cambio de entalpía debido a un cambio de temperatura

$$h_2 - h_1 = C_p(T_2 - T_1) .$$

Para gases reales se cumple que $C_p = C_p(T)$.

Diferenciando la relación para la entalpía $h = u + pv$ se obtiene

$$dh = du + R\,dT$$

$$\frac{dh}{dT} = \frac{du}{dT} + R$$

$\Rightarrow$

$$C_p = C_v + R$$

o

$$C_p - C_v = R\,.$$

Dado que $R > 0$ se desprende que $C_p > C_v$. Se define el coeficiente isoentrópico k como la razón entre C_p y C_v

$$k = \frac{C_p}{C_v}\,,$$

de donde

$$C_p = \frac{k}{k-1}\,R\,,$$

$$C_v = \frac{1}{k-1}\,R\,.$$

Entropía. Para analizar la variación de entropía existen básicamente las siguientes dos relaciones

1. $T\,ds = du + p\,d\left(\frac{1}{\rho}\right)$,
2. $T\,ds = dh - \frac{1}{\rho}\,dp$.

De las relaciones anteriores se puede obtener que

$$ds = C_v\frac{dT}{T} + \frac{R}{1/\rho}d\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

y

$$ds = C_p\frac{dT}{T} - R\,\frac{dp}{p}\,.$$

Integrando las relaciones anteriores entre dos puntos es posible determinar el cambio de entropía específica ⇒

$$s_2 - s_1 = C_v\,\ln\frac{T_2}{T_1} + R\,\ln\frac{\rho_1}{\rho_2}\,,$$

$$s_2 - s_1 = C_p\,\ln\frac{T_2}{T_1} - R\,\ln\frac{p_2}{p_1}\,.$$

Si el flujo es adiabático y sin fricción se tiene que $ds = 0$ o $s_2 - s_1 = 0$. Este tipo de flujo se denomina flujo isoentrópico. De las relaciones anteriores se obtiene

$$C_v\,\ln\frac{T_2}{T_1} + R\,\ln\frac{\rho_1}{\rho_2} = C_p\,\ln\frac{T_2}{T_1} - R\,\ln\frac{p_2}{p_1} = 0\,.$$

⇒

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{k}{k-1}} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^k = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)\,.$$

Se puede concluir que para el flujo isoentrópico de un gas ideal se cumple la relación

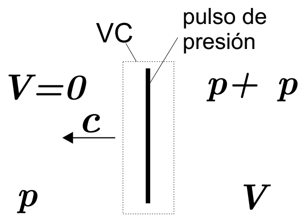
$$\frac{p}{\rho^k} = \text{cte.}\,.$$

11.2 Número de Mach / Velocidad del sonido

El número de Mach (M) es un número adimensional definido como la razón entre la velocidad del flujo V y la velocidad local del sonido en el gas $c \Rightarrow$

$$M = \frac{V}{c}\,.$$

La velocidad del sonido (ver capítulo 1.2.6) es la velocidad con que se propaga una onda de presión a través de un fluido. Considerando el pulso de presión de la figura (onda elástica) que se desplaza a la velocidad del sonido en un fluido originalmente en reposo. Aguas arriba del pulso de presión las condiciones del fluido quedan alteradas.



Pulso de presión

Tomando un volumen de control que envuelva el pulso podemos aplicar la ecuación de continuidad y cantidad de movimiento para determinar la velocidad de propagación c. Aplicando la ecuación de continuidad se obtiene

$$\rho A c = (\rho + \delta\rho)\, A\, (c - \delta V)\,.$$

Desarrollando y despreciando los términos de orden δ^2 se obtiene

$$\rho\,\delta V = c\,\delta\rho\,.$$

La ecuación de cantidad de movimiento aplicada al volumen de control queda

$$-c\rho c A + (c - \delta V)\,(\rho + \delta\rho)\,(c - \delta V)\,A = pA - (p + \delta p)A\,.$$

Desarrollando y despreciando los términos de orden δ^2 y superiores se obtiene

$$-c\rho c + (c - \delta V)\rho c = \delta p$$

$\Rightarrow$

$$\rho\delta V = \frac{\delta V}{c}\,.$$

Combinando los dos resultados anteriores se obtiene

$$c = \sqrt{\frac{\delta p}{\delta\rho}}\,.$$

Tomando el límite cuando $\delta \rightarrow \partial$ se obtiene finalmente

$$c = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial\rho}}\,.$$

Para un flujo isoentrópico se tiene que $p = \mathrm{cte} \cdot \rho^k$ de donde

$$c = \sqrt{k\,R\,T}\,.$$

Utilizando el módulo de compresibilidad volumétrica E_v se obtiene

$$c = \sqrt{\frac{E_v}{\rho}}\,.$$

Para fluidos incompresibles se cumple que $c \to \infty$, lo que implica que una variación de la presión del flujo en algún punto de éste se propaga instantáneamente a todo el fluido.

11.2.1 Clasificación de los tipos de flujo

A parte de las clasificaciones vistas hasta aqui (flujo ideal, uni-, bidimensional, permanente, no permanente, etc.) la compresibilidad agrega una nueva posibilidad que queda caracterizada por el valor del número de Mach. El gráfico 11.1 muestra la variación de la presión con el número de Mach para el caso de un flujo incompresible y un flujo compresible. De este gráfico se puede ver que para valores de M inferiores a 0.3 la solución incompresible es idéntica a la compresible. Para un valor de $M = 0.4$ la diferencia entre ambas soluciones es del orden de un 4 %. Por lo tanto, un flujo de gases se puede considerar como incompresible si $M < 0.3$. Lo anterior nos entrega la siguiente clasificación de acuerdo al número de Mach:

Flujo incompresible		M	< 0.3
Flujo compresible subsónico	$0.3 \leq$	M	< 1.0
Flujo transónico	$1.0 \lesssim$	M	$\lesssim 1.0$
Flujo supersónico	$1.0 <$	M	≤ 3
Flujo hipersónico	$3.0 <$	M	

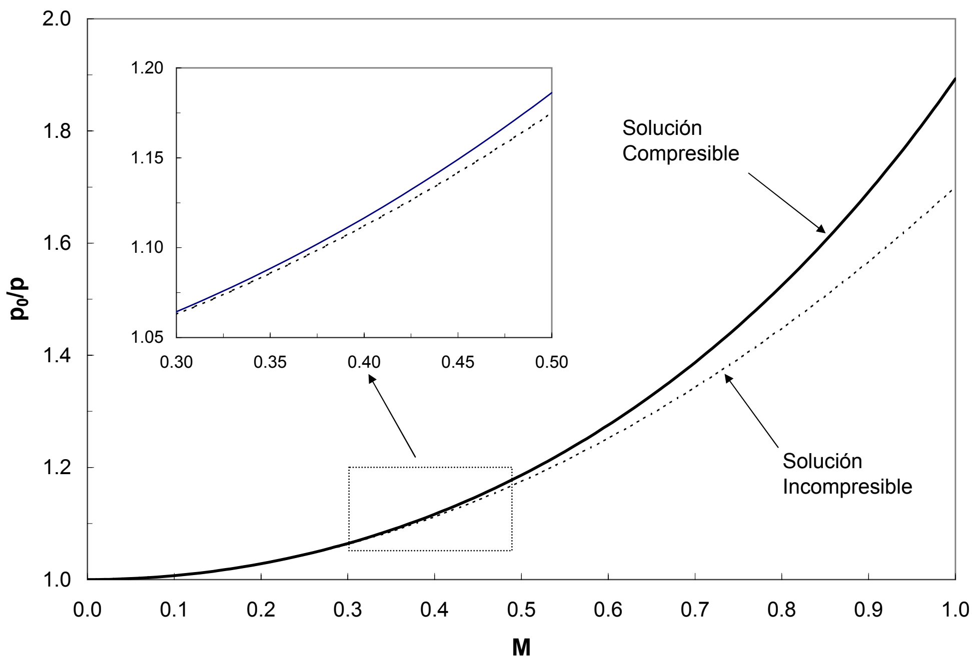


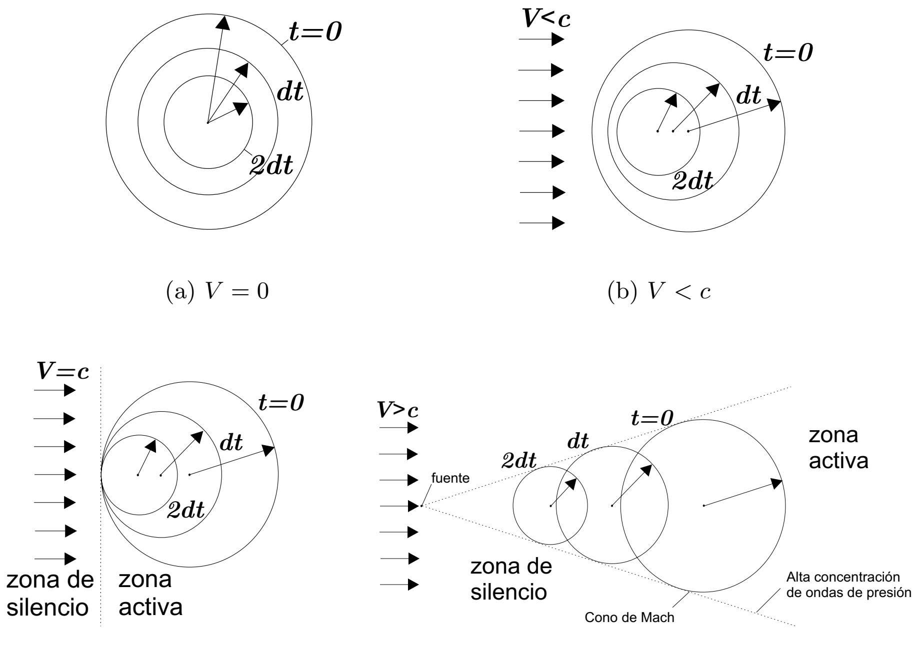
Figura 11.1: Efecto del número de Mach en la presión para un flujo compresible e incompresible

11.2.2 Cono de Mach

Supongamos que una fuente estacionaria inmersa en un fluido produce pulsos de presión a intervalos de tiempo Δt. Si el fluido se encuentra en reposo ($V = 0$) las ondas se propagarán en forma de círculos concéntricos como muestra la figura 11.2(a) (en tres dimensiones se tiene por supuesto esferas concéntricas).

Si el fluido tiene un movimiento uniforme relativo a la fuente, con una velocidad menor que la velocidad del sonido, es decir, $V < c$, los circulos no serán concéntricos, si no que sus origenes se encontrarán desplazados, pero si estarán completamente inmersos dentro de un pulso producido con anterioridad, como muestra la figura 11.2(b).

Para el caso límite cuando $V = c$ el pulso de presión generado será incapas de viajar aguas arriba de la fuente, generándose un plano sobre el cual no es posible detectar la presencia de la fuente ni del pulso de presión (figura 11.2(c)). Esta zona se denomina zona de silencio. La zona donde si es posible detectar la existencia de variaciones de la presión se denomina zona activa.



(a) $V = 0$ (b) $V < c$

(c) $V = c$ (d) $V > c$

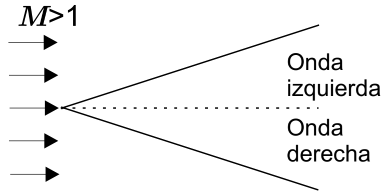
Figura 11.2: Expansión de ondas de presión en un fluido para distintas velocidades del fluido

Si la velocidad del flujo es mayor que la velocidad del sonido, es decir, $V > c$, las esferas viajarán a una velocidad mayor que lo que su velocidad de expansión por lo que ya no se encontrarán unas inmersas en otras. En éste caso se genera una superficie tangencial cónica denominada Cono de Mach (figura 11.2(d)). La zona activa estará en este caso restringida al volumen dentro del cono. La superficie del cono es una región con una alta concentración de ondas de presión y por lo tanto una región a través de la cual existen variaciones bruscas en las propiedades de los fluidos. Como se verá más adelante este fenómeno es equivalente a lo que ocurre a través de una onda de choque.

Para el ángulo medio α del cono se cumple que

$$\sin\alpha = \frac{c}{V} = \frac{1}{M}\,,$$

de donde claramente se puede observar que si el número de Mach aumenta el ángulo α disminuye y viceversa.



Cono de Mach

11.3 Flujo compresible unidimensional

Analizaremos en ésta sección el flujo compresible unidimensional, es decir un flujo en el cual se pueden considerar constantes las propiedades del flujo sobre una sección perpendicular a éste. Los parámetros y variables del flujo variarán por lo tanto solo en la dirección del flujo.

11.3.1 Flujo isoentrópico

Analizaremos el flujo isoentrópico de un gas compresible. En particular nos interesará el efecto que tiene un cambio en la sección de paso del flujo A sobre las condiciones del flujo.

La ecuación de continuidad es

$$\dot{m} = \rho\, A\, V = \text{cte.}$$

Para un flujo incompresible, $\rho = \text{cte}$, una variación de A implica una variación inversa de la velocidad V. Veremos a continuación que éste resultado no es siempre aplicable a un flujo compresible.

De la segunda ley de Newton para un flujo sin roce se obtuvo en capítulos anteriores que

$$dp + \frac{1}{2}\rho\, d(V^2) + \rho g\, dz = 0\,.$$

Despreciando dz frente a los otros dos términos se obtiene

$$dp + \frac{1}{2}\rho\, d(V^2) = 0\,.$$

Desarrollando se obtiene

$$dp = -\rho V\, dV$$

$\Rightarrow$

$$\frac{dp}{\rho V^2} = -\frac{dV}{V}\,. \tag{11.1}$$

A partir de la ecuación de continuidad se puede obtener que

$$\ln\rho + \ln A + \ln V = \text{cte}\,,$$

de donde diferenciando se obtiene

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{dV}{V} = 0$$

o

$$-\frac{dV}{V} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} \,. \tag{11.2}$$

Igualando los dos resultados anteriores y reordenando adecuadamente se obtiene

$$\frac{dp}{\rho V^2}\left(1 - \frac{V^2}{dp/d\rho}\right) = \frac{dp}{\rho V^2}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) = \frac{dA}{A} \,. \tag{11.3}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{dp}{\rho V^2}\left(1 - M^2\right) = \frac{dA}{A} \,. \tag{11.4}$$

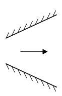
De las ecuaciones 11.1 y 11.2 la ecuación anterior se puede escribir como

$$\frac{dA}{A} = -\frac{dV}{V}\left(1 - M^2\right) \,. \tag{11.5}$$

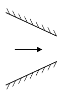
$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dA}{A}\frac{M^2}{(1 - M^2)} \,. \tag{11.6}$$

De la ecuación 11.5 se puede ver que si un flujo es subsónico ($M < 1$) la velocidad y el área de paso cambian en direcciones opuestas. Es decir si A aumenta la velocidad V se reduce. Se tiene además que la presión aumenta. Este resultado es equivalente al obtenido para un flujo incompresible.

Si el flujo es supersónico ($M > 1$) se tiene que un cambio en el área de paso del flujo en una dirección tiene como efecto un cambio de la velocidad en la misma dirección y un cambio de la presión en la dirección opuesta. Por lo tanto si A aumenta la velocidad V también aumenta y la presión disminuye y si A disminuye la velocidad disminuye y la presión aumenta. Este resultado es opuesto al caso de un flujo incompresible. El origen de éste comportamiento se puede encontrar analizando la ecuación 11.6. Para un flujo subsónico la densidad y el área de paso varían en la misma dirección y para un flujo supersónico éstos varían en direcciones opuestas. Como el flujo másico es constante $\Rightarrow \rho AV = $ cte, y suponiendo un ducto divergente donde $dA > 0$, para un flujo subsónico $d\rho > 0$ por lo que la velocidad V debe disminuir para mantener el flujo másico constante. Para un flujo supersónico tendremos que $d\rho < 0$ por lo que la velocidad debe aumentar para mantener el flujo másico constante.



	Flujo subsónico $M < 1$	Flujo supersónico $M > 1$
	$dA > 0$	$dA > 0$
	$dV < 0$	$dV > 0$
	$dp > 0$	$dp < 0$



	Flujo subsónico $M < 1$	Flujo supersónico $M > 1$
	$dA < 0$	$dA < 0$
	$dV > 0$	$dV < 0$
	$dp < 0$	$dp > 0$

Se denomina **tobera** al elemento cuya función es transformar la entalpía de un fluido en energía cinética de un modo eficiente. Por lo tanto, para un flujo subsónico la tobera será convergente y para un flujo supersónico tobera será divergente.

Se denomina **difusor** al elemento cuya función es transformar la energía cinética de un fluido en entalpía o presión. Para un flujo subsónico el difusor será divergente y para un flujo supersónico convergente.

La ecuación 11.5 se puede reordenar de la siguiente manera

$$\frac{dA}{dV} = -\frac{A}{V}\left(1 - M^2\right) ,$$

de donde para $M = 1$ se cumple que $\frac{dA}{dV} = 0$. Lo anterior implica que el área asociada a $M = 1$ es un mínimo o un máximo lo cual se puede presentar en la práctica mediante dos combinaciones que son un ducto convergente–divergente o un ducto divergente–convergente. De un análisis de los objetivos (tobera o difusor) de éste tipo de elementos muestra que solo la combinación convergente–divergente es válida.

Tobera convergente–divergente / Tobera de Laval

Se denomina tobera convergente–divergente a un ducto que posee una sección convergente seguida de una divergente como se muestra en la figura 11.3

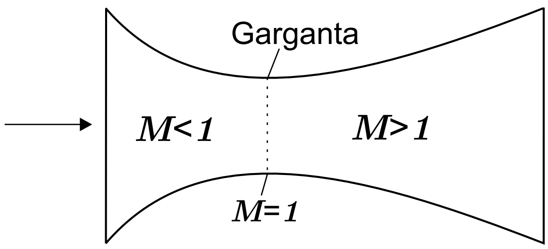


Figura 11.3: Tobera convergente–divergente o tobera de Laval

Si el flujo que entra por la sección convergente de la tobera es subsónico, éste aumentará su velocidad hasta la garganta. Si en éste punto se alcanza la condición sónica, es decir, $M = 1$, el flujo seguirá acelerando en la sección divergente. Si el flujo que entra en la tobera es supersónico la velocidad de éste disminuirá en la sección convergente y si se alcanza la condición sónica en la garganta el flujo seguirá desacelerando en la sección divergente. En éste caso el elemento actuará como difusor.

Las condiciones del flujo en la garganta se denominan condiciones críticas y se distinguen generalmente mediante un superíndice $*$, es decit, T^*, p^*, ρ^*, A^*, etc.. Las toberas y difusores son diseñados para satisfacer, dadas las condiciones del flujo inicial, las condiciones requeridas a la salida.

En el cálculo de flujos compresibles es común utilizar como referencia el estado termodinámico de estancamiento que es el estado que se alcanza al frenar un fluido mediante un proceso sin roce y adiabático (isoentrópico) hasta el reposo ($V = 0$). Las propiedades del fluido en éste estado se denominan propiedades de estancamiento. Si el proceso de frenar el flujo no es adiabático las propiedades de estancamiento no serán las mismas para todos los puntos del flujo. Estas últimas se denominan propiedades de estancamiento local. Los parámetros del flujo y las propiedades del fluido en el punto de estancamiento se designan con un subindice o, es decir, T_o, p_o, ρ_o etc..

En el desarrollo posterior se considerará que las condiciones de estancamiento son constantes.

Despreciando las diferencias de altura ($dz \approx 0$) la forma diferencia de la ecuación de movimiento, utilizada anteriormente, queda

$$\frac{dp}{\rho} + d\left(\frac{V^2}{2}\right) = 0\,.$$

Para un flujo isoentrópico se cumple además

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{cte} = \frac{p_o}{\rho_o^k}\,,$$

Reemplazando en la ecuación anterior resulta

$$\frac{p_o^{\frac{1}{k}}}{\rho_o} \cdot \frac{dp}{p^{\frac{1}{k}}} + d\left(\frac{V^2}{2}\right) = 0\,.$$

Integrando entre el punto de estancamiento y un punto cualquiera del flujo se obtiene

$$\frac{k}{k-1}\left(\frac{p_o}{\rho_o} - \frac{p}{\rho}\right) - \frac{V^2}{2} = 0\,.$$

Utilizando la ecuación de estado para un gas ideal en la ecuación anterior tenemos

$$\underbrace{\frac{k\,R}{k-1}}_{C_p}(T_o - T) - \frac{V^2}{2} = 0 \tag{11.7}$$

$\Rightarrow$

$$C_p(T_o - T) - \frac{V^2}{2} = 0$$

o

$$h_o - h - \frac{V^2}{2} = 0\,.$$

La ecuación 11.7 se puede ordenar de la siguiente forma

$$\frac{T_o}{T} = 1 + \frac{k-1}{2}\,\frac{V^2}{kRT}\,.$$

Como $c^2 = kRT$ se obtiene

$$\frac{T_o}{T} = 1 + \frac{k-1}{2}\,M^2\,.$$

$\Rightarrow$

$$\frac{T}{T_o} = \frac{1}{1 + \frac{k-1}{2}\,M^2}\,. \tag{11.8}$$

De las condiciones de flujo isoentrópico se tenía que

$$\frac{p}{p_o} = \left(\frac{T}{T_o}\right)^{\frac{k}{k-1}}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{p}{p_o} = \left[\frac{1}{1 + \frac{k-1}{2} M^2}\right]^{\frac{k}{k-1}} \tag{11.9}$$

y

$$\frac{\rho}{\rho_o} = \left[\frac{1}{1 + \frac{k-1}{2} M^2}\right]^{\frac{1}{k-1}} . \tag{11.10}$$

Estas tres ecuaciones permiten relacionar T, p y ρ en cualquier punto de una tobera convergente divergente con las condiciones de estancamiento. Se puede ver además que al aumentar M tanto T como p decrecen, lo que significa que tanto temperaturas como presiones bajas están asociadas a númeroas de Mach altos.

Si las condiciones a la salida de la tobera son tales que se alcanza la condición $M = 1$ en la garganta cualquier disminución posterior de p no afectará el flujo en la sección convergente, en particular el flujo másico no se verá afectado. Bajo éstas condiciones se dice que el flujo se encuentra estrangulado.

Las siguientes ecuaciones relacionan las condiciones en la garganta, suponiendo $M = 1$ en ella, con las condiciones de estancamiento:

$$\frac{p^*}{p_o} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}} ,$$

$$\frac{T^*}{T_o} = \left(\frac{2}{k+1}\right) .$$

La razón A/A^*, donde A y A^* son el área de paso de la tobera en un punto cualquiera y en la garganta respectivamente resulta (de $\rho\, A\, V = \rho^*\, A^*\, V^*$)

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{1 + \frac{k-1}{2} M^2}{1 + \frac{k-1}{2}}\right]^{\frac{k+1}{2(k-1)}} . \tag{11.11}$$

Las relaciones 11.8, 11.9, 11.10 y 11.11 se pueden ver gráficamente en la figura 11.15.

Flujo real en toberas

En la sección anterior se supone que el flujo es adiabático y sin roce o isoentrópico. En condiciones reales la restricción más fuerte es la no existencia de fricción. La existencia de fricción produce, en un flujo adiabático, un aumento de la temperatura del fluido debido a lo cual la entalpía de salida será mayor que la que se alcanzaría en un flujo isoentrópico. Dado que la función de la tobera es convertir la entalpía del flujo en energía cinética, la existencia de fricción claramente introduce ineficiencias al sistema. Lo anterior se representa en el diagrama $h - s$ de la figura donde a partir de las condiciones de entrada p_1 el flujo se expande hasta la presión p_2.

Para un flujo isoentrópico las condiciones de salida quedan representadas por el punto 2. Para un flujo real sin embargo las condiciones de salida son las condiciones correspondientes al punto $2'$. El rendimiento de una tobera esta dado por

$$\eta = \frac{(V_2^2/2)_{\text{real}}}{[(V_1^2/2) + (h_1 - h_2)]_{\text{isoentr.}}} = \frac{(V_{2'}^2/2)_{\text{real}}}{[(V_1^2/2) + (h_1 - h_2)]_{\text{isoentr.}}} \,.$$

Por lo general la energía cinética del fluido a la entrada es despreciable con respecto a $(h_1 - h_2)$ por lo que el rendimiento se puede escribir como

$$\eta = \frac{(V_2^2/2)_{\text{real}}}{(h_1 - h_2)} \,.$$

Es frecuente también encontrar en la literatura el rendimiento expresado mediante el factor de recalentamiento y definido por

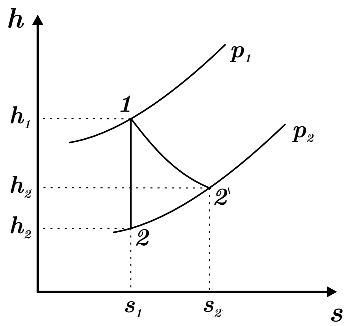


Diagrama $h - s$.

$$y = \frac{h_{2'} - h_2}{h_1 - h_2} \,.$$

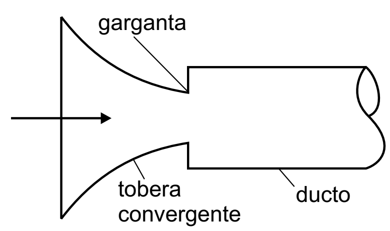
Se puede demostrar que

$$\eta = 1 - y \,,$$

de donde

$$\eta = \frac{h_1 - h_{2'}}{h_1 - h_2} \,.$$

Ejemplo A través de un ducto convergente pasa aire en forma permanente desde la atmósfera a una tubería como se ve en la figura. La sección de paso mínima o garganta tiene un área de paso de $10^{-4}\,m^2$. Determine el flujo másico si la presión en el ducto es de a) $80\,kPa$ y b) $40\,kPa$.



Tobera converjente

Dibuje un diagrama $T-s$ para ambos casos. Datos: $\rho = 1.23\,kg/m^3$, $k = 1.4$, $R = 286.9\,J/kgK$, $T_{\text{atm}} = 15°C$, $p_{\text{atm}} = 101\,kPa$ (abs).

Para determinar el flujo másico se debe utilizar la siguiente relación

$$\dot{m} = \rho\, A\, V = \text{cte}$$

que en la sección mínima o garganta es

$$\dot{m} = \rho_g\, A_g\, V_g \,.$$

Para determinar ρ_g se utiliza la ecuación 11.10

$$\frac{\rho_g}{\rho_0} = \left[\frac{1}{1 + \frac{k-1}{2}\, M_g^2}\right]^{\frac{1}{k-1}} \,,$$

donde la incognita es M_g. Para determinar M_g se cuenta con la relación para las presiones. Además se sabe que si la presión en el ducto p_d es mayor o igual que la presión crítica p^*, entonces $p_g = p_d$. Por otro lado si $p_d < p^*$ entonces el flujo estará estrangulado y $p_g = p^*$. Se debe por lo tanto determinar p^*. Para el aire con $k = 1.4$ se obtiene que

$$p^* = 0.528\, p_0 \,.$$

Las condiciones de estancamiento son para este caso iguales a las condiciones ambientales ya que se puede suponer que lejos de la entrada a la tobera la atmósfera se encuentra en reposo, es decir, $T_0 = T_{\text{atm}}$, $p_0 = p_{\text{atm}}$ y $\rho_0 = \rho_{\text{atm}}$

$\Rightarrow$

$$p^* = 0.528\, p_{\text{atm}} = 0.528 \cdot 101 = 53\, kPa \,.$$

La velocidad en la garganta se determina de

$$V_g = M_g\, c(T_g) = M_g \sqrt{kRT_g} \,.$$

T_g se obtiene de la ecuación 11.8.

a) Para una presión en el ducto de $80\, kPa$ que es mayor que la presión crítica calculada anteriormente se cumple que $p_g = p_d$. Reemplazando en la ecuación 11.9 se obtiene

$$\frac{80}{101} = \left[\frac{1}{1 + \frac{1.4-1}{2}\, M_g^2} \right]^{\frac{1.4}{1.4-1}}$$

de donde se obtiene

$$M = 0.587 \,.$$

Con este resultado se obtiene

$$\frac{\rho_g}{\rho_0} = \frac{\rho_g}{1.23} = \left[\frac{1}{1 + \frac{1.4-1}{2}\, 0.587^2} \right]^{\frac{1}{1.4-1}}$$

$\Rightarrow$

$$\rho_g = 1.04\, kg/m^3$$

y

$$\frac{T_g}{15 + 273} = \left[\frac{1}{1 + \frac{1.4-1}{2}\, 0.587^2} \right]$$

$\Rightarrow$

$$T_g = 269\, K \,.$$

$\Rightarrow$

$$V_g = 0.587 \sqrt{286.9 \cdot 1.4 \cdot 269} = 193 \sqrt{J/kg}$$

$$V_g = 193\, m/s \,.$$

Por lo tanto

$$\dot{m} = 1.04 \cdot 10^{-4} \cdot 193\, kg/s$$

$\Rightarrow$

$$\dot{m} = 0.0201\, kg/s\,.$$

b) Para $p_d = 40\, kPa$ se cumple que $p_g = p^* = 53\, kPa$ y $M_g = 1$. Reemplazando en las mismas relaciones que para el punto a) se obtiene

$$\rho_g = 0.780\, kg/m^3$$

y

$$T_g = 240\, K.$$

$\Rightarrow$

$$V_g = 1 \cdot \sqrt{1.4 \cdot 286.9 \cdot 240} = 310\, m/s\,.$$

$\Rightarrow$

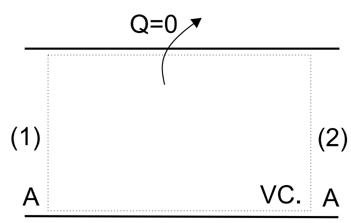
$$\dot{m} = 0.780 \cdot 310 \cdot 10^{-4}$$

$$\dot{m} = 0.0242\, kg/s.$$

11.3.2 Flujo de Fanno

Se denomina Flujo de Fanno al flujo de un gas ideal compresible, no isoentrópico ($s \neq$ cte) y adiabático en un ducto de sección constante como el de la figura. La ecuación de continuidad es

$$\dot{m} = \rho\, A\, V = \text{cte}\,.$$



Flujo de Fanno

Como $A =$ cte se obtiene

$$\rho\, V = \text{cte}\,.$$

La ecuación de conservación de la energía aplicada al volumen de control queda expresada por

$$\dot{m}\left[h_2 - h_1 + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g\,(z_2 - z_1)\right] = \dot{Q} + \dot{W}\,.$$

Despreciando la diferencia de cotas entre los puntos 1 y 2 y como el flujo es adiabático y no hay trabajo externo, es decir $\dot{Q} = \dot{W} = 0$, se obtiene

$$h_2 + \frac{V_2^2}{2} = h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h + \frac{V^2}{2} = h_0\,,$$

donde h_0 es la entalpía de estancamiento. Para un gas ideal se cumple además que

$$h - h_0 = C_p(T - T_0)\,.$$

Combinando ambas ecuaciones se obtiene

$$T + \frac{V^2}{2\,C_p} = T_0 = \text{cte}$$

o

$$T + \frac{(\rho V)^2\,T^2}{2\,C_p\frac{p^2}{R^2}} = T_0 = \text{cte}\,.$$

Como T_0 es constante y ρV también es constante, la ecuación anterior relaciona las variables p y T para un flujo de Fanno. Por otro lado y a partir de la segunda ecuación para $T\,ds$ vista anteriormente en éste capítulo, se obtiene la siguiente relación

$$s - s_1 = C_p\,\ln\frac{T}{T_1} - R\ln\frac{p}{p_1}$$

donde se consideró al pto. (1) como referencia. Combinando las últimas dos ecuaciones el flujo de Fanno queda representado en un diagrama $T - s$, para unas condiciones de estancamiento (T_0), un tipo de gas (C_p, R) y unas condiciones iniciales (T_1, p_1, s_1) dadas, por líneas como la que se muestra en la figura 11.4. Estas líneas se denominan líneas de Fanno.

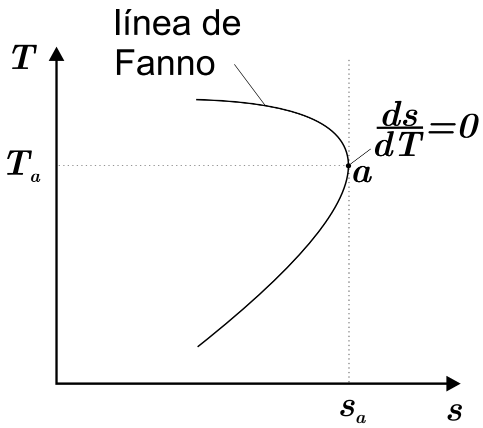


Figura 11.4: Diagrama $T - s$ para el flujo de Fanno

De la relación

$$T\,ds = dh - \frac{dp}{\rho}$$

y considerando un gas ideal y que $\rho V = \text{cte}$ de donde

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dV}{V}$$

se obtiene

$$\frac{ds}{dT} = \frac{C_p}{T} - R\left(\frac{C_p}{V^2} + \frac{1}{T}\right)\,.$$

Para el punto (a) de la línea de Fanno se cumple que $ds/dT = 0$ de donde obtiene

$$0 = \frac{C_p}{T_a} - R\left(\frac{C_p}{V_a^2} + \frac{1}{T_a}\right)$$

$\Rightarrow$

$$V_a = \sqrt{R\,T_a\,k}\,,$$

es decir, la velocidad en el punto (a) de la curva es igual a la velocidad del sonido o el número de Mach es igual a 1, $M|_a = 1$. Como la temperatura de estancamiento es igual para todos los puntos de la línea de Fanno lo anterior significa que la temperatura en (a) corresponde a la temperatura crítica T^*. La parte de la curva que se encuentra sobre el punto (a) corresponde a un flujo subsónico y la parte bajo el punto (a) a un flujo supersónico.

La segunda ley de la termodinámica dice que para un flujo adiabático con roce la entropía debe aumentar. Sobre la línea de Fanno lo anterior indica que un flujo solo puede desarrollarse hacia el punto (a) de la curva. Un flujo subsónico es, por lo tanto, acelerado por la fricción hasta un valor máximo posible de $M = 1$. Un flujo supersónico es desacelerado a causa de la fricción obteniéndose valores inferiores del número de Mach. Más adelante se verá que mediante una onda de choque es posible que un flujo supersónico se transforme en un flujo subsónico. Un flujo subsónico, sin embargo, jamás podrá convertirse en un flujo supersónico.

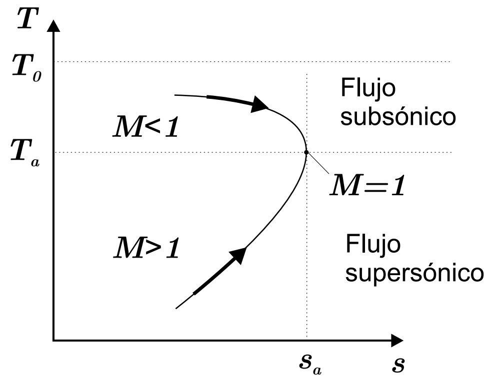


Figura 11.5: Desarrollo del flujo para el flujo de Fanno

Se analizará cualitativamente a continuación como varía el flujo con el largo del ducto para el caso subsónico y supersónico. Para un flujo subsónico y un ducto de largo l_1 se tiene que si el flujo en l_1 no ha alcanzado el estado sónico ($M = 1$), es decir $M(l_1) < 1$, entonces el flujo saldrá del ducto subsónicamente a la presión externa como un chorro libre. Suponiendo que el ducto se alarga se puede alcanzar $M = 1$ a la salida. Si el ducto se alarga por sobre ésta condición y dado que el flujo no puede seguir aumentando su velocidad se producirá un reajuste (disminución) en el caudal másico del flujo de tal forma de reestablecer la condición sónica a la salida. Lo anterior indica que para un ducto dado existe un caudal máximo que puede pasar por el ducto y éste se obtiene cuando $M = 1$ a la salida. En éste csao se dice que el flujo esta estrangulado. Un reajuste del flujo significa en el diagrama $T - s$ que el flujo cambia de una línea de Fanno a otra.

Para un flujo supersónico a la entrada de un ducto de largo l_1 se tiene que si $M > 1$ a la salida se produciran ondas de choque fuera del ducto para ajustar la presión del chorro con la presión ambiente. Alargando el ducto se alcanzará la condición $M = 1$ a la salida y el flujo estará estrangulado. Un aumento posterior de l llevará a que se produzcan ondas de choque dentro del

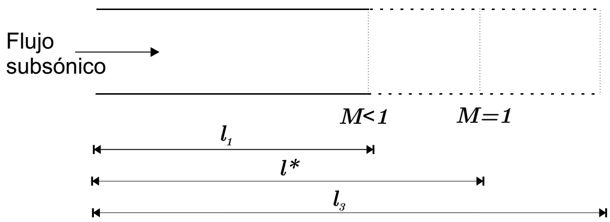


Figura 11.6: Flujo de Fanno subsónico

tubo generándose de ésta forma un flujo subsónico que acelera hasta reeestablecer la condición sónica a la salida.

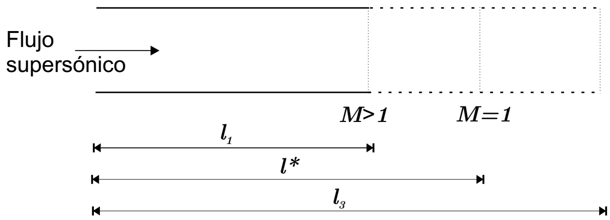
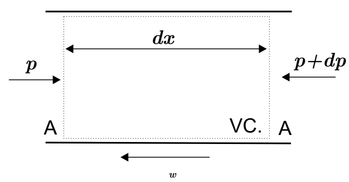


Figura 11.7: Flujo de Fanno supersónico

Relaciones para un gas perfecto

Se supondrá en el desarrollo que el ducto es de sección circular y por lo tanto el área de paso estará dada por $A = \pi D^2/4$. Para el volumen de control de la figura la ecuación de cantidad de movimineto queda de la siguiente forma



$$pA - (p + dp)A - \pi D\tau_w \, dx = -\rho V^2 A + (\rho + d\rho)(V + dV)^2 A$$

$\Rightarrow$

$$dp + d(\rho V^2) = -\frac{\pi D\tau_w}{A} \, dx$$

$$dp + d(\rho V^2) = -\frac{4\,\tau_w}{D} \, dx \, .$$

Como

$$d(\rho V^2) = \rho V \, dV + V d(\rho V) = \rho V \, dV$$

$\Rightarrow$

$$dp + \rho V \, dV = -\frac{4}{D}\tau_w \, dx \, .$$

Expresando τ_w como una función de un factor de fricción f tal que

$$\tau_w = \frac{f}{4}\frac{1}{2}\rho V^2$$

y reemplazando se obtiene

$$dp + \rho V\, dV = \frac{1}{2}\frac{f}{D}\rho V^2$$

$\Rightarrow$

$$\frac{dp}{p} + \frac{f}{p}\frac{1}{2}\rho V^2\,\frac{dx}{D} + \frac{1}{2}\rho\frac{d(V^2)}{p} = 0\,.$$

Introduciendo la ecuación de estado para gases ideales, la ecuación para la velocidad del sonido, la definición del número de Mach, la ecuación de conservación de la energía para un gas ideal la ecuación anterior se puede escribir como

$$\frac{(1-M^2)\; d(M^2)}{\left[1+\frac{k-1}{2}\,M^2\right]\; kM^4} = f\,\frac{dx}{D}\,.$$

Esta ecuación se puede integrar entre dos secciones de un ducto. Por lo general se utiliza el estado sónico (M=1), independientemente si éste exista en la realidad, como referencia para la integración, es decir,

$$\int\limits_{M}^{M=1} \frac{(1-M^2)\; d(M^2)}{\left[1+\frac{k-1}{2}\,M^2\right]\; kM^4} = \int\limits_{l}^{l=l^*} f\,\frac{dx}{D}\,.$$

Suponiendo un factor de fricción medio $\bar{f}$ constante se obtiene

$$\frac{\bar{f}(l^*-l)}{D} = \frac{1}{k}\frac{(1-M^2)}{M^2} + \frac{k+1}{2k}\ln\left[\frac{\frac{k+1}{2}\,M^2}{1+\frac{k-1}{2}\,M^2}\right]. \tag{11.12}$$

Los valores de la función se encuentran en forma de tablas y gráficos para el aire. La ecuación anterior es aplicable entre dos puntos cualesquiera (1) y (2) de un ducto de la siguiente forma

$$\int\limits_{l_1}^{l_2} f\,\frac{dx}{D} = \frac{f}{D}(l_2-l_1) = \int\limits_{l_2}^{l^*} f\,\frac{dx}{D} - \int\limits_{l_1}^{l^*} f\,\frac{dx}{D} = \frac{f(l^*-l_2)}{D} - \frac{f(l^*-l_1)}{D}\,.$$

Para las demás propiedades del flujo se obtienen las siguientes relaciones para un flujo de Fanno

$$\frac{T}{T^*} = \frac{\frac{k+1}{2}}{1+\frac{k-1}{2}\,M^2}\,,$$

$$\frac{V}{V^*} = \left[\frac{\frac{k+1}{2}\,M^2}{1+\frac{k-1}{2}\,M^2}\right]^{0.5}\,,$$

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \frac{1+\frac{k-1}{2}\,M^2}{\frac{k+1}{2}\,M^2}\,,$$

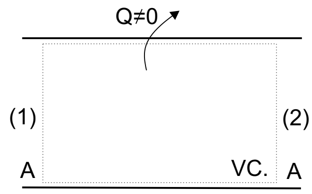
$$\frac{p}{p^*} = \frac{1}{M}\left[\frac{\frac{k+1}{2}}{1+\frac{k-1}{2}M^2}\right]^{0.5},$$

$$\frac{p_0}{p_0^*} = \frac{1}{M}\left[\left(\frac{2}{k+1}\right)\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)\right]^{\frac{k+1}{2(k-1)}}.$$

Las relaciones anteriores se pueden ver gráficamente en la figura 11.16.

11.3.3 Flujo de Rayleigh

Se denomina Flujo de Rayleigh al flujo de un gas perfecto compresible, isoentrópico (s = cte) y no adiabático ($\dot{Q} \neq 0$) en un ducto de sección constante como el de la figura.La ecuación de cantidad de movimiento aplica al volumen de control es



$$p_1A_1 + \dot{m}V_1 = p_2A_2 + \dot{m}V_2 + 0$$

$\Rightarrow$

$$p + \frac{(\rho V)^2}{\rho} = \text{cte}\,. \tag{11.13}$$

Utilizando la ecuación de estado para gases ideales la ecuación anterior se puede escribir como

$$p + \frac{(\rho V)^2\,RT}{p} = \text{cte}\,.$$

Como el producto ρV es constante para el flujo de Rayleigh la ecuación anterior relaciona, para un flujo dado (R), la presión con la temperatura. Combinando ésta relación con la segunda ecuación vista anteriormente para la entropía se puede gráficar el desarrollo del flujo en un diagrama $T - s$ obteniéndose curvas como la que se muestran en la figura.

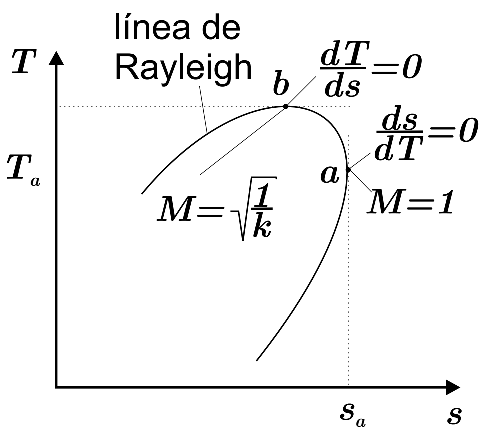


Figura 11.8: Diagrama $T - s$ para el flujo de Rayleigh

Diferenciando 11.13 y utilizando la forma diferencial de la ecuación de estado, la ecuación de continuidad y la segunda de las ecuaciones para $T\,ds$ la ecuación anterior se puede escribir como

$$\frac{ds}{dT} = \frac{C_p}{T} + \frac{V}{T}\frac{1}{\left(\frac{T}{V} - \frac{V}{R}\right)} \,.$$

Para el punto (a) de la curva se cumple que $ds/dT = 0$ de donde

$$V_a = \sqrt{R\,T_a\,k}$$

lo que indica que el número de Mach en el punto a es uno, es decir, $M_a = 1$. Para el punto b se cumple que $dT/ds = 0$ de donde

$$M_b = \sqrt{\frac{1}{k}} \,.$$

Dado que $k > 1$ para todos los gases, el flujo en el punto b debe ser subsónico.

La ecuación de conservación de la energía para el VC. es

$$\dot{m}\left[h_2 - h_1 + \frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2} + g(z_2 - z_1)\right] = \dot{Q} + \dot{W} \,.$$

Como $\dot{W} = 0$ para el flujo de Rayleigh y despreciando $z_2 - z_1$ la ecuación anterior, en forma diferencial, se escribe de la siguiente manera

$$dh + V\,dV = \delta q = (\dot{Q}/\dot{m}) \,.$$

Utilizando $dh = C_p\,dT$, la ecuación para la velocidad del sonido, el número de Mach, la ecuación de continuidad y la ecuación de estado, la ecuación anterior se escribe como

$$\frac{dV}{V} = \frac{\delta q}{C_p T}\frac{1}{(1 - M^2)} \,.$$

De la ecuación anterior se puede ver que para un flujo subsónico ($M < 1$) un calentamiento del flujo ($\delta q > 0$) produce una aceleración del flujo ($dV > 0$) y que un enfriamiento ($\delta q < 0$) produce una desaceleración del flujo ($dV < 0$). Para el caso supersónico se verifica un comportamiento inverso, es decir, $\delta q > 0 \Rightarrow dV < 0$ y $\delta q < 0 \Rightarrow dV > 0$. Este comportamiento se puede determinar también a partir de la gráfica para las líneas de Rayleigh ya que para un flujo sin roce la entropía aumenta si $\delta q > 0$ y disminuye si $\delta q < 0$. Cabe hacer notar además que entre el punto b y a de la curva de Rayleigh que al calentar el flujo ($\delta q > 0$) se produce un descenso en la temperatura de éste.

Efectuando un desarrollo equivalente al realizado para el flujo de Fanno es posible determinar las siguientes ecuaciones

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{1 + kM_2^2}{1 + kM_1^2} \,,$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{M_1}{M_2}\,\frac{1 + kM_2^2}{1 + kM_1^2}\right)^2 \,,$$

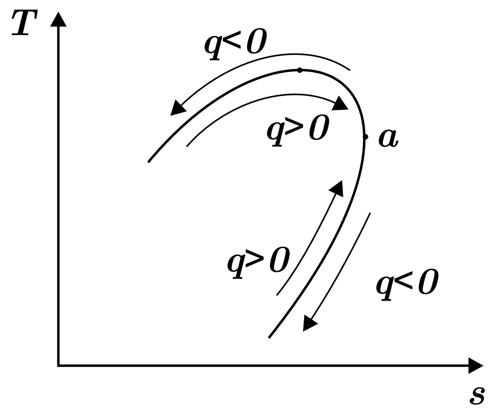


Figura 11.9: Diagrama $t - s$ para el flujo de Rayleigh

$$\frac{(p_0)_1}{(p_0)_2} = \left[\frac{p_1}{p_2}\frac{1+\frac{k-1}{2}M_1^2}{1+\frac{k-1}{2}M_2^2}\right]^{\frac{k}{k-1}} = \frac{1+kM_2^2}{1+kM_1^2}\cdot\left[\frac{1+\frac{k-1}{2}M_1^2}{1+\frac{k-1}{2}M_2^2}\right]^{\frac{k}{k-1}} .$$

Utilizando el punto a, donde $M_a = 1$, como referencia se obtiene

$$\frac{p}{p_a} = \frac{1+k}{1+kM^2} ,$$

$$\frac{T}{T_a} = \left(\frac{M(1+k)}{1+kM^2}\right)^2 ,$$

$$\frac{(p_0)}{(p_0)_a} = \frac{1+k}{1+kM^2}\cdot\left[\left(\frac{2}{1+k}\right)\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)\right]^{\frac{k}{k-1}} ,$$

$$\frac{T_0}{(T_0)_a} = \frac{2(k+1)M^2\left[1+\frac{k-1}{2}M^2\right]}{(1+kM^2)^2} ,$$

$$\frac{\rho_a}{\rho} = \frac{V}{V_a} = \frac{M^2(1+k)}{1+kM^2} .$$

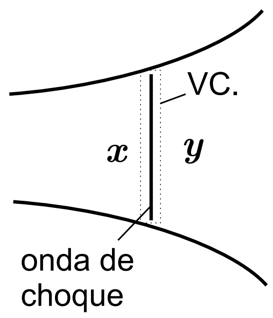
La figura 11.17 muestra en forma gráfica las relaciones anteriores.

11.4 Ondas de choque

Una onda de choque es una onda de presión o acústica de intensidad finita, es decir, las variaciones en la propiedades del flujo se manifiestan en un entorno muy cercano al frente de onda. Para efectos de éste capítulo se considerará que éste entorno es tan pequeño que se considerará como una discontinuidad en el flujo. Se verá que las ondas de choque se encuentran sólo en flujo supersónicos.

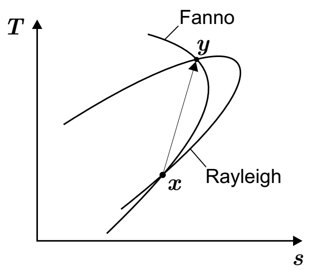
11.4.1 Ondas de choque normales

En las ondas de choque normales o planas el vector velocidad del flujo es normal a la superficie que contiene la onda tanto antes como después de la onda. En éste tipo de ondas de choque el flujo despúes de la onda será siempre subsónico. Dado que el espesor de la onda es infinitesimal y que a través de la onda ocurren cambios finitos en las propiedades y parámetros del flujo, los términos diferenciales se pueden considerar como despreciables.



Onda de choque plana

Lo anterior permite suponer que la sección de la onda, a través de la cual pasa el flujo, es constante ($A =$ cte, que a través de la onda el flujo es adiabático ($\dot{Q} \approx 0$) y que el roce con la pared es despreciable ($\tau_w = 0$).



De lo anterior se desprende que el flujo a través de un onda choque plana debe cumplir tanto con las condiciones para el flujo de Fanno y el flujo de Rayleigh. Si se dibujan las curvas de Fanno y Rayleigh que pasan por el estado del fluido antes (x) de la onda de choque se tendrá que el punto de salida (y) de la onda debe estar con la otra intersección de las curvas como se muestra en la figura.

Se cumple además que el punto y se encuentra siempre a la derecha del punto x y como la entropía aumenta en todo proceso irreversible se concluye que un onda de choque solo puede producirse en un flujo supersónico y que tiene como consecuencia un flujo subsónico.

A partir de las relaciones obtenidas anteriormente para el flujo de Fanno y Rayleigh se obtiene las siguientes ecuaciones que relacionan el flujo antes (x) y después (y) de una onda de choque.

$$\frac{p_y}{p_x} = \frac{1 + k\,M_x^2}{1 + k\,M_y^2}\,,$$

$$\frac{T_y}{T_x} = \frac{1 + \frac{k-1}{2}\,M_x^2}{1 + \frac{k-1}{2}\,M_y^2}\,,$$

$$M_y^2 = \frac{M_x^2 + \frac{2}{k-1}}{\frac{2k}{k-1}M_x^2 - 1}\,,$$

$$\frac{p_y}{p_x} = \frac{2k}{k+1}\,M_x^2 - \frac{k-1}{k+1}\,,$$

$$\frac{T_y}{T_x} = \frac{\left(1 + \frac{k-1}{2}\,M_x^2\right)\left(\frac{2k}{k-1}M_x^2 - 1\right)}{\frac{(k+1)^2}{2(k-1)}\,M_x^2}\,,$$

$$\frac{\rho_y}{\rho_x} = \frac{V_x}{V_y} = \frac{(k+1)M_x^2}{(k-1)M_x^2 + 2}\,,$$

$$\frac{(p_0)_y}{(p_0)_x} = \frac{\left(\frac{k+1}{2}M_x^2\right)^{\frac{k}{k-1}} \left(1+\frac{k-1}{2}M_x^2\right)^{\frac{k}{1-k}}}{\left(\frac{2k}{k+1}M_x^2 - \frac{k-1}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}}}$$

$$\frac{(T_0)_y}{(T_0)_x} = 1\,.$$

11.4.2 Ondas de choque oblicuas / Ondas de expansión

Las ondas de choque oblicuas son ondas de amplitud o intensidad finita cuya normal se encuentra inclinada con respecto a la dirección del flujo. Este tipo de ondas se encuentran principalmente en el flujo alrededor de cuerpos que viajan a velocidades supersónicas y en un cambio de dirección cóncavo de un flujo supersónico. Las líneas de corriente giran, al pasar el flujo por una onda de choque oblicua, hacia el flujo principal. Para encontrar las relación entre las condiciones del flujo antes y después de la onda de choque se analizará la figura 11.10 donde existe un flujo supersónico el cual es obligado a cambiar de dirección. Para ésta figura se tiene que V_1 y V_2 son la velocidad antes y después de la onda de choque, $V_{i,n}$ y $V_{i,t}$ las componentes normal y tangencial, de la velocidad V_i, a la superficie que contiene la onda de choque, θ el ángulo de giro de la superficie y β el ángulo en el cual se produce la onda de choque.

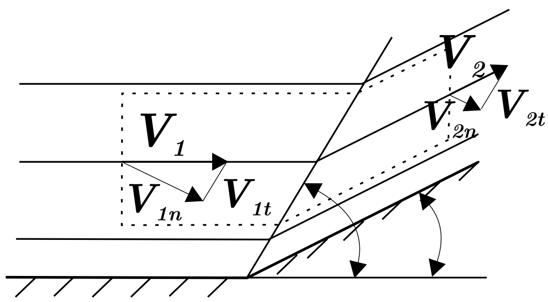


Figura 11.10: Onda de choque oblicua producida por un cambio de dirección del flujo.

Aplicando la ecuación de cantidad de movimiento al volumen de control, que está formado por un tubo de corriente donde $A_1 = A_2$ se obtiene para las direcciones normal y tangencial a la de choque las siguientes ecuaciones

$$\rho_1 V_{1,n}^2 + p_1 = \rho_2 V_{2,n} + p_2$$

$$\dot{m} V_{1,t} = \dot{m} V_{2,t}$$

$\Rightarrow$

$$V_{1,t} = V_{2,t}\,.$$

La ecuación de continuidad aplicada al volumen de control resulta

$$\rho_1 V_{1,n} = \rho_2 V_{2,n}\,.$$

De las ecuaciones anteriores y de lo visto en la sección anterior sobre ondas de choque plana, se desprende que

- La componente tangencial de la velocidad no sufre alteraciones al pasar por la onda de choque.
- Para la componente normal de la velocidad, y las demás propiedades, se cumplen las relaciones vistas para la onda de choque plana.

Una consecuencia de lo anterior es que la velocidad después de la onda de choque V_2 puede ser supersónica. Utilizando las relaciones para una onda de choque plana se puede llegar a las siguientes relaciones equivalentes entre los ángulos θ y β y el número de Mach antes del choque M_1

$$\tan(\beta-\theta) = \frac{\tan\beta}{k+1}\left[k-1+\frac{2}{M_1^2\cdot\sin^2\beta}\right],$$

$$\tan\theta = 2\cot\beta\cdot\left[\frac{M_1^2\sin^2\beta-1}{M_1^2(k+\cos 2\beta)+2}\right].$$

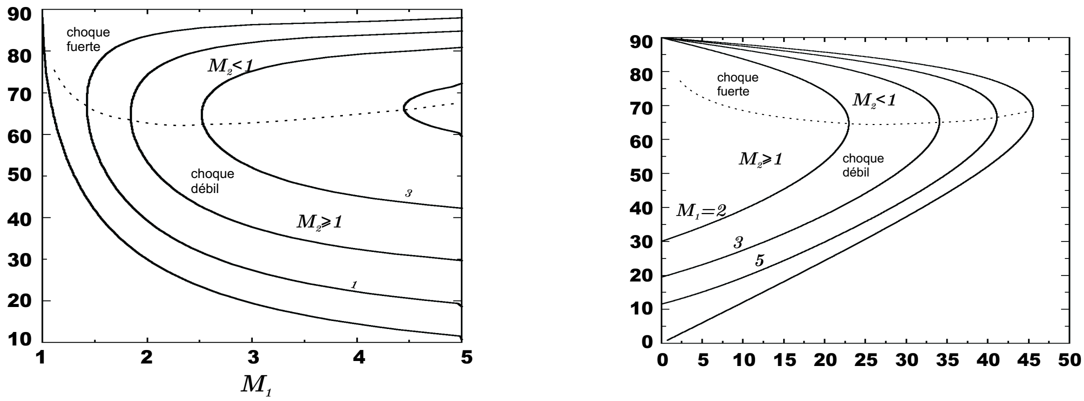


Figura 11.11: Relación entre el ángulo de deflección θ, el ángulo de la onda de choque β y el número de Mach antes del choque M_1.

Estas relaciones se encuentran graficadas el la figura 11.11. De éstos gráficos se pueden extraer las siguientes conclusiones

1. Para un M_1 y un ángulo de deflexión θ dado existen 2 posibles ángulos de choque β, uno grande y otro pequeño. Para el primero la disminución de la velocidad y el aumento de la presión es elevado y se denomina choque fuerte. Para un ángulo β pequeño las variaciones de la velocidad y la presión son menores y el choque se denomina débil.
2. Para un ángulo θ dado existe un número de Macha M_1 mínimo para el cual existe solo un ángulo β.
3. Para un θ dado, si M_1 es menor que el mínimo para esa curva so existe un ángulo *beta* correspondiente. Esto significa que la onda de choque se separa del cuerpo. Lo anterior se puede expresar también como que para un M_1 dado existe un ángulo θ lo suficientemente grande como para producir una onda de choque separada.

Para el flujo alrededor de un cuerpo obtuso se generará por lo tanto una onda de choque separada. Como entre la onda de choque y el punto de estancamiento la velocidad del fluido se reduce considerablemente existirá por lo general, una zona en la cual el choque será fuerte ($M_2 < 1$) y otra donde será débil ($M_2 > 1$).

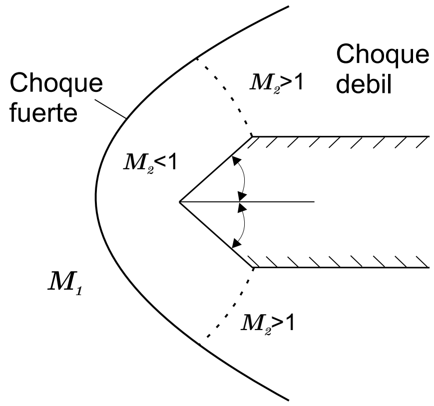


Figura 11.12: Onda de choque separada de la superficie del cuerpo.

Dado que la presión aumenta a través de la onda de choque, éstas se denominan también ondas de compresión. Para el caso de vuelos supersónicos un aumento de la presión esta asociado directamente a un aumento en el arrastre. Lo anterior se traduce en que los perfiles alares supersónicos tienen un forma puntiguda con un ángulo θ pequeño.

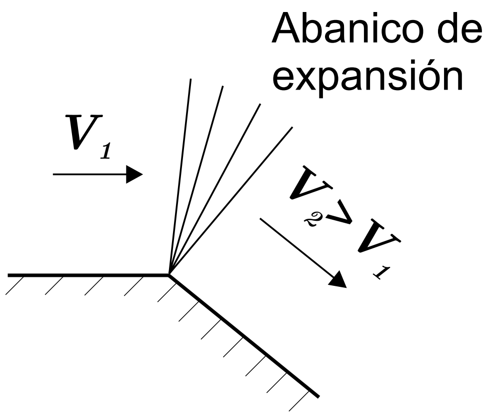


Figura 11.13: Ondas y abanico de expansión.

En contraste con las ondas de compresión o choque, en los lugares del flujo en los que existe un cambio de dirección convexo, es decir, el flujo gira en sentido contrario a la dirección del flujo como se muestra en la figura, se producira una expansión del flujo ($p \downarrow$, $V \uparrow$). Si el cambio de dirección de la superficie se concentra en un punto o esquina las líneas de corriente se deflectarán hacia abajo a través de una serie de ondas de expansión oblicuas o abanico de expansión. Estas ondas se denominan también ondas de expansión de Prandtl-Meyer debido a que fueron los primeros en estudiar este fenómeno (1907-1908). A diferencia de lo que pasa en las ondas de choque los cambios a través de las distintas ondas de expansión son continuos, salvo para el punto adjacente a la esquina (A) del cuerpo. A través de una onda de expansión el número de Mach aumenta, y la presión, la temperatura y la densidad disminuyen.

11.4.3 Funcionamiento de toberas

Se analizará en esta sección las diferentes condiciones de flujo que se alcanzan en una tobera convergente divergente cuando se varía la presión de descarga o contrapresión p_d. El análisis se realiza graficando la distribución de presiones p en la tobera adimensionalizada por la presión de estancamiento p_0 para diferentes valores de la contrapresión.

Para $p_d = p_0$ no existirá flujo en la tobera. Reduciendo p_d por debajo de p_0 comenzará el flujo. Si p_d es tal que no se alcanza el estado sónico o crítico en la garganta el flujo acelerará en la sección convergente y desacelerará en la sección divergente. Esta situación queda representada mediante la curva a del gráfico. Reduciendo p_d aumentará el flujo másico $\dot{m}$ que pasa a través de la tobera e irá aumentando su velocidad. En el límite se alcanzará el estado sónico en la garganta desacelerando posteriormente en la sección divergente (curva b). El flujo másico será el máximo posible para las condiciones de estancamiento (p_0, T_0, ρ_0), la presión será la presión crítica p^*. La curva b es el límite para la región I del gráfico donde el flujo es subsónico en toda la tobera.

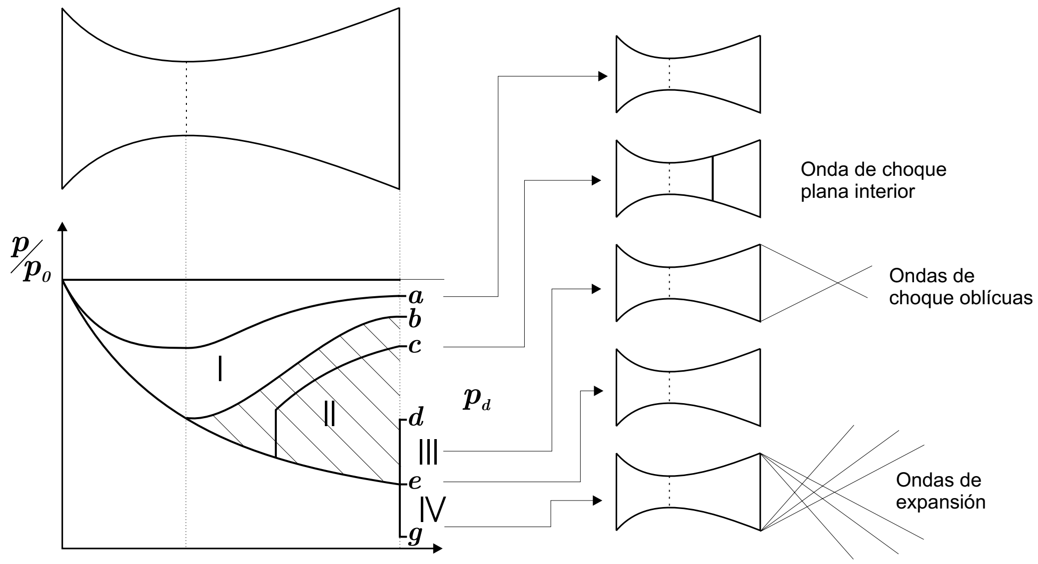


Figura 11.14: Funcionamiento de una tobera convergente divergente fuera de las condiciones de diseño.

Reduciendo p_d el flujo en la tobera se encontrará estrangulado y en la parte divergente se desarrollará un flujo supersónico. Si p_d es superior a la presión que se alcansaría al expandir completamente el flujo en la tobera será necesario un reajuste (aumento) de la presión del gas dentro de la tobera. Este ajuste se logra mediante una onda de choque plana. Como el flujo detrás de una onda de choque plana es subsónico, éste desacelerará y aumentará la presión en la sección divergente que resta hasta que la presión de salida del flujo sea igual a la contrapresión p_d. Este fenómeno queda representado por la curva c. Reduciendo la presión p_d el lugar donde se produce la onda de choque se desplaza hacia la salida de la tobera. En el límite ésta se producirá justo en la sección de salida de la tobera (curva d). Las curvas b y d son los límites de la región II donde las ondas de choque se producen en el interior de la tobera.

Descensos posteriores de p_d tendrán como efecto un reajuste de la presión del flujo con la presión de descarga fuera de la tobera mediante una serie de ondas de choque bi- y tridimensionales. A medida que se reduce p_d la intensidad de las ondas de choque disminuirá ya que la diferencia entre la presión de salida del flujo y la presión de descarga disminuye. En el límite la presión de descarga p_d será igual a la presión de salida del flujo y la tobera se encontrará operando bajo las condiciones de diseño. En este caso no existirán ondas de choque. Entre las curvas d y e la presión de salida del flujo es menor que la presión de descarga por lo que se dice que la tobera se encuentra operando sobreexpansionada (III).

Si p_d se baja por debajo de la curva e la presión de salida del flujo será mayor que la presión de descarga y por lo tanto nuevamente será necesario un ajuste de la presión. Este ajuste se produce fuera de la tobera mediante ondas de expansión bi- y tridimensionales. Esta región (IV) se denomina región subexpansionada.

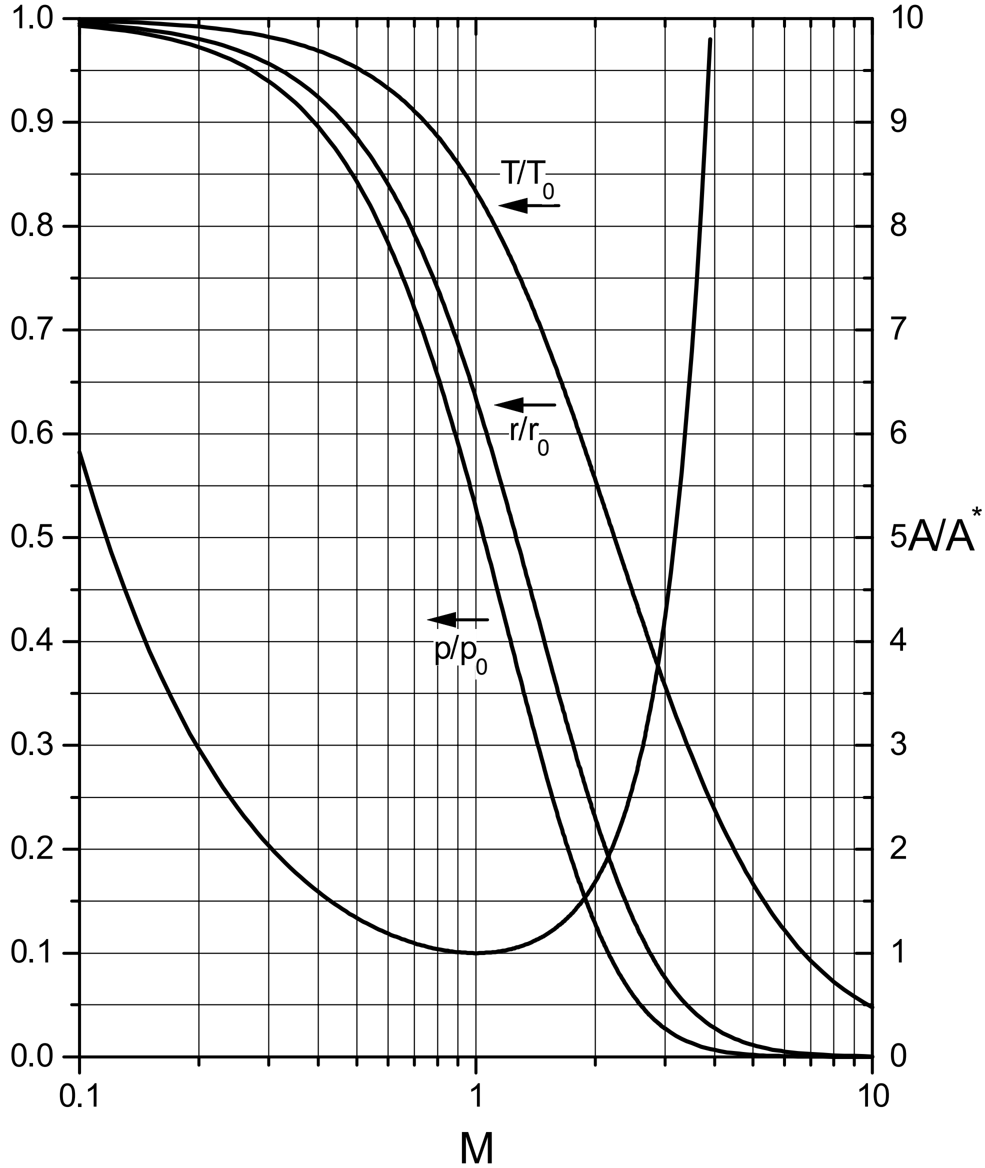


Figura 11.15: Correlaciones para el flujo compresible isoentrópico.

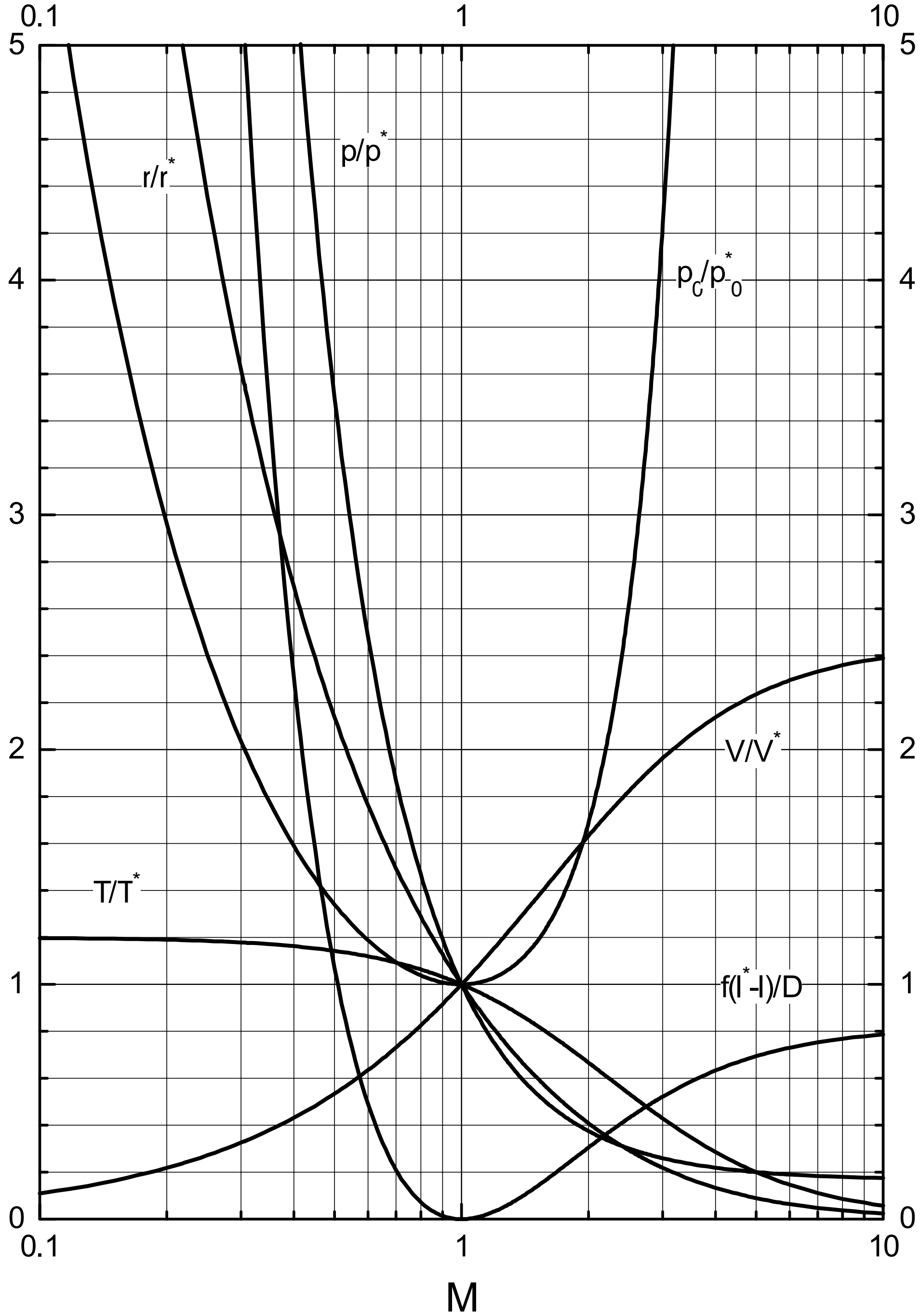


Figura 11.16: Correlaciones para el flujo de Fanno.

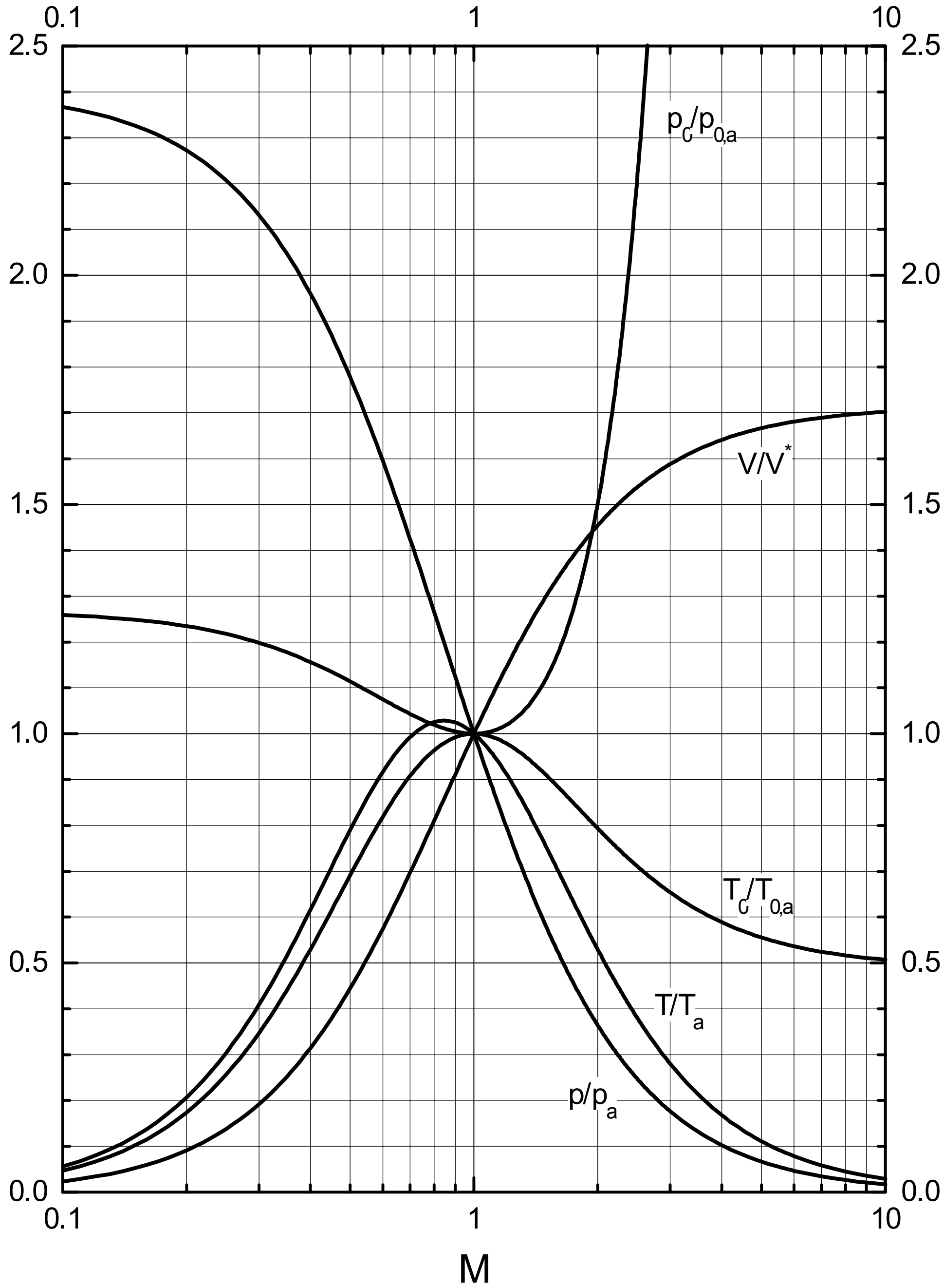


Figura 11.17: Correlaciones para el flujo de Rayleigh.

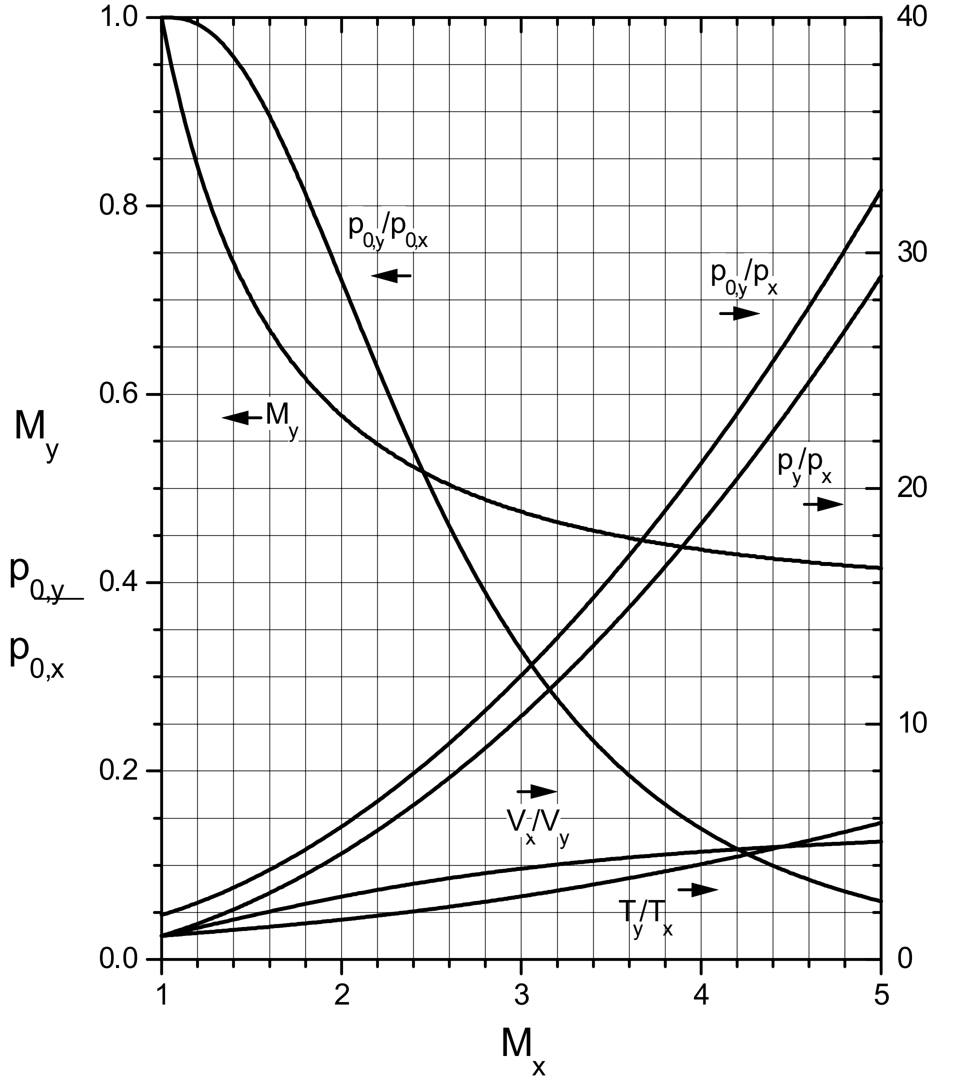


Figura 11.18: Correlaciones para el flujo a través de una onda de choque plana.