Capítulo 8

Análisis Dimensional y Semejanza

Dado que el número de problemas que se puede resolver en forma puramente analítica es pequeño, la gran mayoría requiere algún grado de resultados empíricos o experimentales. Lo anterior es particularmente cierto en el ámbito de la mecánica de fluidos, cuyo desarrollo ha dependido fuertemente de resultados experimentales. Por otro lado los resultados obtenidos en forma experimental deben ser lo más generales posibles y extrapolables a situaciones fuera de las condiciones "ideales" en las que se realizaron. El análisis dimensional ofrece un método para reducir problemas físicos complejos a su forma funcional mas simple antes de obtener una respuesta cuantitativa acerca del problema. Permite, por lo tanto, tener una visión general del problema y las variables (adimensionales) relevantes involucradas.

En el corazón del análisis dimensional se encuentra el concepto de similitud o semejanza. En términos físicos, la similitud se refiere a alguna equivalencia entre dos fenómenos diferentes. Por ejemplo, bajo algunas condiciones particulares hay una relación directa entre las fuerzas que actúan sobre un avión de tamaño real y aquéllas que actúan sobre un modelo a escala que se prueba en el túnel de viento de un laboratorio. La pregunta es naturalmente, cuales son esas condiciones que hacen equivalente el estudio y extrapolables los resultados de un modelo a escala. En términos matemáticos, la similitud se refiere a una transformación de variables que llevan a una reducción en el número de variables independientes que especifican un problema. Aquí la pregunta natural es, qué tipo de transformación es necesaria hacer y en cuanto se pueden reducir el número de variables independientes. El análisis dimensional es una herramienta que responde éstas preguntas. Su utilidad principal radica en la capacidad de representar en forma más reducida la forma funcional de relaciones físicas involucradas en un fenómeno dado. Un problema que en un principio puede parecer complejo, puede a veces resolverse con un esfuerzo pequeño a través del análisis dimensional.

Como ejemplo de lo anterior consideraremos el problema de determinar la caída de presión por unidad de largo Δp_l, que se produce a lo largo de la tubería lisa por efecto de la fricción. Dentro de las variables geométricas y físicas que se esperaría que influyeran en la caída de presión se encuentra el diámetro de la tubería, la velocidad del flujo y la viscosidad y densidad del fluido. Se puede establecer por lo tanto una relación funcional f de la siguiente forma:

$$\Delta p_l = f(D, \rho, \mu, V)$$

donde f es la función a determinar experimentalmente. El desarrollo de experimentos sistemáticos para encontrar f implicaría necesariamente el medir Δp_l variando solo una de las variables a la vez, la velocidad por ejemplo, y manteniendo las demás constantes. Este proceder debería repetirse análogamente para cada una de las variables obteniendo una gran cantidad de información la cual se puede representar gráficamente como se muestra en el gráfico 8.1.

Extraer de esta información la deseada función f que relacione las variables independientes con la dependiente es, incluso para este caso sencillo, prácticamente imposible. Además de esto las dificultades experimentales, como por ejemplo, variar la densidad manteniendo la viscosidad constante, no son despreciables e incluso pueden llegar a ser imposibles de solucionar.

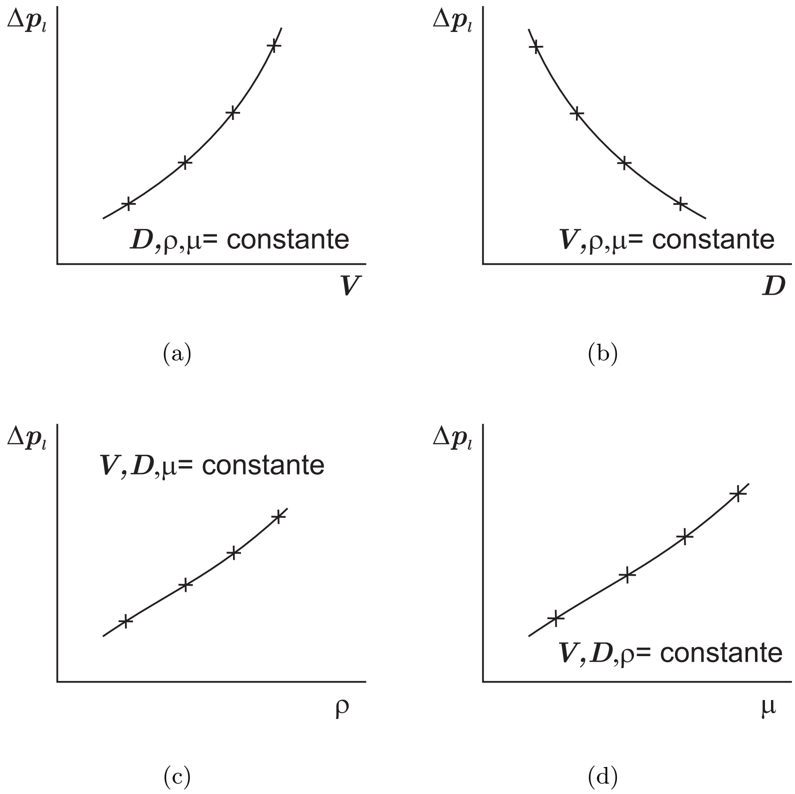

Figura 8.1: Relación entre la caída de presión con las distintas variables independientes.

Salta a la vista que esta forma de proceder, tanto desde un punto de vista práctico como económico, no es apropiada . En este caso la relación funcional entre la variable dependiente (Δp_l) y las variables independientes (D, V, ρ, μ) se puede expresar en función de dos grupos de variables sin dimensión, denominados grupos adimensionales, de la siguiente forma:

$$\frac{D\Delta p_l}{\rho V^2} = \phi\left(\frac{\rho V D}{\mu}\right).$$

Una primera ventaja de este proceder es que se redujo el número de variables de cinco a dos. Un experimento para determinar ϕ requeriría solo la variación del grupo adimensional $\rho V D/\mu$ para determinar el valor de $D\Delta p_l/\rho V^2$. Los resultados se pueden representar mediante una sola curva universal (figura 8.2) que será independiente del tamaño de la tubería, del fluido utilizado y además del sistema de unidades utilizado y será, por lo tanto, extrapolable a otras condiciones distintas a las del experimento.

Este tipo de análisis es lo que se denomina análisis dimensional y las bases para su aplicación se encuentra en el teorema Π de Buckingham, que se describe a continuación.

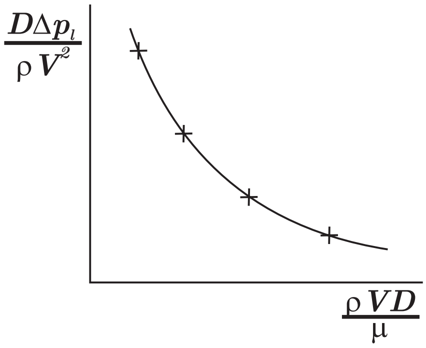

Figura 8.2: Representación adimensional de la caída de presión Δp_l

8.1 Teorema Π de Buckingham

Uno de los puntos importantes a determinar es el número de grupos o productos adimensionales necesarios para representar un fenómeno dado, en forma adimensional. La respuesta a esta pregunta la entrega el siguiente teorema:

> *El número de grupos adimensionales* (Π) *independientes necesarios para describir un fenómeno dimensionalmente homogéneo, en el que intervienen k variables dimensionales, es igual a* $k-r$*, donde r es, generalmente, el número de dimensiones básicas o fundamentales mínimas necesarias para representar las variables del fenómeno*

El teorema entrega solo el número de grupos adimensionales necesarios para representar un fenómeno dado y no la forma que tienen estos grupos así como tampoco entrega información acerca de la relación funcional que representa un fenómeno dado. Esta relación de determinarse ya sea analítica o experimentalmente.

8.2 Obtención de grupos adimensionales

Existen varios métodos para determinar los grupos adimensionales involucrados en un fenómeno dado, partiendo desde el simple tanteo, lo cual involucra o supone un gran conocimiento del fenómeno y una gran experiencia en análisis dimensional, hasta metodologias mas sistemáticas que aseguran el número adecuado de grupos adimensionales y que estos sean independientes. A continuación se describirá uno de esos métodos denominado método de las variables repetidas.

8.2.1 Método de las variables repetidas

El método de las variables repetidas se divide en una serie de pasos a seguir independiente del fenómeno a analizar. Estos pasos son los siguientes:

1. **Determinar variables involucradas.** Este es el punto más difícil dentro del análisis dimensional y es de vital importancia que todas las variables involucradas sean incluidas. Esto requiere, por lo tanto, un conocimiento mínimo del fenómeno a estudiar. Es aconsejable incluir variables de las cuales no se esta seguro sobre su pertinencia. Un desarrollo posterior, por ejemplo experimental, mostrará si es posible eliminarla o no. Dentro de

las variables, y dependiendo por supuesto del tipo de fenómeno, se deben incluir variables geométricas como diámetros, largos, etc., propias del fluido como la densidad, la viscosidad, etc., efectos externos como gradientes de presión y cualquier otra variable que se estime necesaria. Para mantener el número de variables en un mínimo las variables elegidas deben ser independientes entre sí, es decir, ninguna variable debe poder formarse como una combinación de las demás variables.

2. **Expresar las variables en términos de sus dimensiones básicas.** Para los problemas típicos de la mecánica de fluidos las dimensiones básicas pueden ser F, L, T o M, L, T. Estos dos sets de dimensiones se encuentran relacionados mediante la segunda ley de Newton por la relación $F = MLT^{-2}$.

3. **Determinar el número de grupos adimensionales.** Dado el número de variables incluidas en el punto 1 y el número de dimensiones básicas que aparecen en el punto 2, el número de grupos adimensionales se determina a través del teorema Π de Buckingham como la resta entre estas dos magnitudes.

4. **Seleccionar un número de variables repetidas igual al número de dimensiones básicas involucradas.** Lo que se debe hacer aquí es seleccionar de la lista de variables un número igual al número de dimensiones básicas que aparecen en el punto 2, para poder combinarlas con las demás variables para formar los grupos adimensionales. Las variables seleccionadas deben ser dimensionalmente independientes entre sí, es decir, las dimensiones de una no puede obtenerse como una combinación de las dimensiones de las otras variables repetidas. Tampoco se debe elegir como variable repetida la variable dependiente del fenómeno ya que ésta aparecerá, por lo general, en mas de un grupo adimensional.

5. **Formar los grupos adimensionales.** Los grupos adimensionales se forman multiplicando las variables excluidas de la lista de variables repetidas con las variables repetidas elevadas cada una a un exponente por determinar, es decir,

$$\Pi_i = u_i \underbrace{u_1^a u_2^b u_3^c}_{\substack{\text{variables}\\ \text{repetidas}}} .$$

6. **Expresar los grupos adimensionales en función de las dimensiones básicas y resolver sistema de ecuaciones asociado.** Como los grupos Π son adimensionales se deben determinar los exponentes a, b, c de modo que esto se cumpla.

7. **Verificar que los grupos obtenidos sean adimensionales.** Dado que es fácil cometer un error al determinar los grupos adimensionales es recomendable verificar la adimensionalidad de los grupos reemplazando las dimensiones de cada variable del grupo y verificando que sea adimensional. Es recomendable también realizar en esta verificación en términos de M, L, T, si las dimensiones básicas utilizadas en los puntos anteriores fueron F, L, T o viceversa.

8. **Formar la relación funcional entre los grupos Π.** Con los números adimensionales determinados se puede escribir la relación funcional entre ellos de la siguiente forma:

$$\Pi_1 = \phi(\Pi_2, \dots \Pi_{k-r})$$

donde Π_1 contiene la variable dependiente en el numerador.

Ejemplo

Determinar los grupos adimensionales necesarios para describir el fenómeno de caída de presión por unidad de largo Δp_l que se produce a lo largo de la tubería lisa por efecto de la fricción.

1. Como se mencionó anteriormente las variables independientes involucradas son el diámetro de la tubería D, la densidad ρ y la viscosidad μ del fluido y la velocidad del flujo V, es decir:

$$\Delta p_l = f(D, \rho, \mu, V).$$

2. Utilizando F, L, T como las dimensiones básicas se cumple que:

$$\Delta p_l = FL^{-3}$$

$$D = L$$

$$\rho = FL^{-4}T^2$$

$$\mu = FL^{-2}T$$

$$V = LT^{-1}$$

El utilizar F, L, T como las dimensiones básicas es una decisión arbitraria y perfectamente se podría haber utilizado M, L, T. Lo que no se debe hacer es mezclar ambos sistemas.

3. Del punto anterior se puede ver que las dimensiones básicas involucradas son tres. Dado que el número de variables involucradas es 5 ($\Delta p_l, D, \rho, \mu, V$), y utilizando el teorema de Buckingham, se obtiene que el número de grupos adimensionales Π es igual a 2 (5-3).

4. Como tenemos tres dimensiones básicas involucradas se deben elegir tres variables a repetir. Estas variables deben contener entre ellas todas las dimensiones básicas y ser independientes entre sí. Se eligen D, ρ, V como variables repetidas.

5. Los grupos adimensionales Π se forman con las variables repetidas y cada una de las demás variables:

$$\Pi_1 = \Delta p_l D^a V^b \rho^c$$

$$\Pi_2 = \mu D^a V^b \rho^c$$

6. Para que Π_1 sea adimensional se debe cumplir que:

$$(FL^{-3})(L)^a(LT^{-1})^b(FL^{-4}T^2)^c = F^0L^0T^0$$

La relación anterior lleva al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 1 + c &= 0 \\ -3 + a + b - 4c &= 0 \\ -b + 2c &= 0 \end{aligned}$$

que tiene como solución $a = 1$, $b = -2$ y $c = -1$. Por lo tanto,

$$\Pi_1 = \frac{\Delta p_l D}{\rho V^2}$$

Análogamente, para que Π_2 sea adimensional se debe cumplir que:

$$(FL^{-2}T)(L)^a(LT^{-1})^b(FL^{-4}T^2)^c = F^0L^0T^0$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} 1 + c &= 0 \\ -2 + a + b - 4c &= 0 \\ 1 - b + 2c &= 0 \end{aligned}$$

que tiene como solución $a = -1$, $b = -1$ y $c = -1$. $\Rightarrow$

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho V D}$$

7. Verificación. Se hará la verificación utilizando tanto las dimensiones FLT como MLT.

$$\Pi_1 = \frac{\Delta p_l D}{\rho V^2} = \frac{(FL^{-3})(L)}{(FL^{-4}T^2)(LT^{-1})^2} = F^0L^0T^0$$

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho V D} = \frac{(FL^{-2}T)}{(L)(LT^{-1})(FL^{-4}T^2)} = F^0L^0T^0$$

o

$$\Pi_1 = \frac{\Delta p_l D}{\rho V^2} = \frac{(ML^{-2}T^{-2})(L)}{(ML^{-3})(LT^{-1})^2} = M^0L^0T^0$$

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho V D} = \frac{(ML^{-1}T^{-1})}{(L)(LT^{-1})(ML^{-3})} = M^0L^0T^0$$

8. Finalmente, la relación funcional que se obtiene es

$$\frac{\Delta p_l D}{\rho V^2} = \varphi\left(\frac{\mu}{\rho V D}\right)$$

Como los grupos Π son adimensionales, estos se pueden reordenar y en particular se pueden invertir. Por ejemplo Π_2 se podría escribir como

$$\Pi_2 = \frac{\rho V D}{\mu}$$

y la relación entre Π_1 y Π_2 como

$$\frac{\Delta p_l D}{\rho V^2} = \phi\left(\frac{\rho V D}{\mu}\right),$$

que es la relación mencionada anteriormente. Veremos mas adelante que el grupo adimensional $(\rho V D/\mu)$ es un grupo adimensional importante en la mecánica de fluidos.

Cabe mencionar que los grupos adimensionales, determinados mediante el método de las variables repetidas, dependen de las variables elegidas como variables a repetir. En el ejemplo anterior se eligieron ρ, V y D y se obtuvo la relación

$$\frac{\Delta p_l D}{\rho V^2} = \phi\left(\frac{\rho V D}{\mu}\right).$$

De haber elegido, por ejemplo, μ, V y D como las variables repetidas se obtiene la relación

$$\frac{\Delta p_l D^2}{\mu V} = \phi_1\left(\frac{\rho V D}{\mu}\right).$$

Ambas relaciones llevarían a la misma función para Δp_l, sin embargo, las funciones ϕ y ϕ_1 son distintas. La discusión anterior permite concluir que no existe un set único de números adimensionales Π para un problema dado. Visto desde otro punto de vista, el análisis dimensional solo asegura la cantidad de números adimensionales necesarios para representar un problema pero no su unicidad.

8.3 Grupos adimensionales de importancia en la Mecánica de Fluidos

Durante los años de desarrollo de la mecánica de fluidos se han identificado un sin número de grupos adimensionales de relevancia. El entender el significado físico que estos encierran permite tener una visión mas acabada de los distintos fenómenos. Las variables que generalmente intervienen en los distintos fenómenos son la presión y la velocidad del flujo, la viscosidad, densidad y tensión superficial del fluido, aceleración de gravedad, la velocidad de propagación del sonido, etc.. Dentro de las fuerzas que influyen en un flujo se encuentran por ejemplo las fuerzas debidas a la inercia, la viscosidad, presión, tensión superficial y compresibilidad. La razón entre cualquiera par de estas fuerzas genera grupos adimensionales. Por ejemplo, de la segunda ley de Newton las fuerzas inerciales son $F = ma$. La masa se puede escribir como $m = \rho\forall$ y como el volumen $\forall$ tiene dimensiones de longitud, se obtiene que $m \propto \rho L^3$. Análogamente, se obtiene que $a \propto V^2/L$. Por lo tanto la fuerza de inercia será

$$F \propto \rho L^3 \frac{V^2}{L} = \rho V^2 L^2.$$

Haciendo un desarrollo análogo para las fuerzas viscosas se obtiene

$$\text{Fuerzas viscosas} = \tau A = \mu \frac{du}{dy} A \propto \mu \frac{V}{L} L^2 = \mu V L.$$

Haciendo la razón entre las fuerza de inercia sobre las fuerzas viscosas se obtiene el grupo adimensional llamado número de Reynolds Re:

$$Re = \frac{\text{Fuerzas de inercia}}{\text{Fuerzas viscosas}} = \frac{\rho V^2 L^2}{\mu V L} = \frac{\rho V L}{\mu},$$

donde L es una dimensión característica descriptiva de la geometría del flujo. Este número fue introducido por Reynolds quien estudiaba la transición entre los regímenes laminar y turbulento para el flujo en una tubería. Para este caso la dimensión característica es el diámetro del tubo D, de donde

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu},$$

que es igual al grupo adimensional encontrado en el ejemplo desarrollado anteriormente. Lo anterior indica que la caída de presión en una tubería lisa depende del número de Reynolds

$$\frac{\Delta p_l D}{\rho V^2} = \phi\left(Re\right),$$

El número de Reynolds es uno de los números adimensionales mas importantes y utilizados en la mecánica de fluidos debido a que los efectos inerciales son de importancia en la mayoría de los problemas.

La tabla 8.1 muestra alguno de los números adimensional más importantes en la mecánica de fluidos así como una interpretación física y su campo de aplicación.

Tabla 8.1: Grupos adimensionales importantes en la mecánica de fluidos.

Grupo Adimensional	Nombre	Interpretación física	Tipo de aplicación
$\frac{\rho V L}{\mu}$	Reynolds, Re	$\frac{\text{fuerzas inerciales}}{\text{fuerzas viscosas}}$	De importancia en la mayoría de las aplicaciones
$\frac{V}{\sqrt{gL}}$	Froude, Fr	$\frac{\text{fuerzas inerciales}}{\text{fuerzas gravitacionales}}$	Flujos con superficies libres
$\frac{p}{\rho V^2}$	Euler, Eu	$\frac{\text{fuerzas de presión}}{\text{fuerzas inerciales}}$	Aplicaciones donde la presión o las diferencias de presión son de interés
$\frac{\rho V^2}{E_v}$	Cauchy, Ca	$\frac{\text{fuerzas inerciales}}{\text{fuerzas de compresibilidad}}$	Aplicaciones donde la compresibilidad del fluido es importante
$\frac{V}{c}$	Mach, M	$\frac{\text{fuerzas inerciales}}{\text{fuerzas de compresibilidad}}$	Aplicaciones donde la compresibilidad del fluido es importante
$\frac{wL}{V}$	Stroudhal, St	$\frac{\text{fuerzas de inercia local}}{\text{fuerzas inerciales convectivas}}$	Flujos no permanentes con una frecuencia natural de oscilación
$\frac{\rho V^2 L}{\sigma}$	Weber, We	$\frac{\text{fuerzas inerciales}}{\text{fuerzas de tensión superficial}}$	Aplicaciones donde la tensión superficial es importante

8.4 Semejanza

Como se mencionó anteriormente el término similitud o semejanza física se refiere a la equivalencia entre dos fenómenos. En términos de la mecánica de fluidos interesa, por ejemplo, las condiciones que deben ser satisfechas para que los resultados de un fenómeno obtenidos en un laboratorio mediante un modelo a escala sean aplicables a un prototipo a escala real. Dicho de otra manera, cuales son las condiciones a satisfacer para que la función entre los números adimensionales, obtenida para el modelo, sea la misma que para el prototipo. Para que se cumpla la similitud entre un modelo y un prototipo debe existir:

- Semejanza geométrica. El modelo debe ser una versión a escala lo más detalladamente posible del prototipo.
- Semejanza cinemática. Dos flujos son cinemáticamente semejantes cuando las velocidades en puntos equivalentes tienen la misma dirección y la razón entre las magnitudes de la velocidad y la aceleración es constante para todo el flujo, es decir,

  $$\frac{V_m}{V_p} = \text{constante},$$

  $$\frac{a_m}{a_p} = \text{constante}.$$

  Flujos cinemáticamente semejantes tienes líneas de corriente geométricamente semejantes y como el contorno del cuerpo corresponde a una línea de corriente se desprende que la semejanza cinemática implica necesariamente la semejanza geométrica.
- Semejanza dinámica. Si la distribución de fuerzas en dos flujos es tal que en puntos correspondientes y para fuerzas del mismo tipo (cortante, presión, etc.) las fuerzas son paralelas y la razón entre sus módulos es constante para todos los puntos equivalentes y para los diversos tipos de fuerzas presentes, se dice que los flujos son dinámicamente semejantes. Por lo tanto, en el caso de semejanza dinámica entre dos flujos existirá una relación sencilla y de fácil cálculo entre fuerzas correspondientes. Esto es de gran importancia, por ejemplo, para evaluar las fuerzas de arrastre y sustentación, a las que estaría sometido un prototipo, a partir de las determinadas en un modelo a escala en un laboratorio.

En términos prácticos lo anterior se traduce en que, asegurada la semejanza geométrica, la semejanza dinámica se obtiene si los grupos adimensionales involucrados en el fenómeno son iguales, es decir, tienen el mismo valor para el modelo y el prototipo.

Ejemplo

Se debe determinar el arrastre al que estaría sometido un sonar esférico de 30 cm de diámetro si se desplaza a una velocidad de 2.57 m/s (5 nudos marítimos) sumergido en en el mar ($\rho = 1028.4\, kg/m^3$, $\nu = 1.57 \cdot 10^{-6} m^2/s$), a partir de los datos en un túnel de viento ($\rho = 1.23\, kg/m^3$, $\nu = 1.46 \cdot 10^{-5} m^2/s$). El modelo tiene 15 cm de diámetro. Determine la velocidad requerida en el túnel de viento. Si la fuerza de arrastre sobre el modelo es igual a 24.82 N, evalúe la fuerza a la que estaría sometido el sonar.

De un análisis dimensional se obtiene la siguiente relación funcional.

$$\frac{F}{\rho V^2 D^2} = \phi\left(\frac{\rho V D}{\mu}\right).$$

Para que se exista semejanza dinámica se debe cumplir que

$$Re_{\text{modelo}} = Re_{\text{prototipo}}$$

$\Rightarrow$

$$\left(\frac{\rho V D}{\mu}\right)_{\mathrm{m}} = Re_{\mathrm{p}}.$$

Para el prototipo se tiene

$$Re_{\mathrm{p}} = \frac{2.57 \cdot 0.30}{1.57 \cdot 10^{-6}} = 4.91 \cdot 10^5 = Re_{\mathrm{m}}$$

$\Rightarrow$

$$V_m = Re_{\mathrm{m}} \frac{\nu_m}{D_m} = 4.91 \cdot 10^5 \, \frac{1.46 \cdot 10^{-5}}{0.15} = 47.8 \, m/s$$

A esta velocidad el modelo y el prototipo son dinámicamente semejantes por lo que

$$\left(\frac{F}{\rho V^2 D^2}\right)_{\mathrm{modelo}} = \left(\frac{F}{\rho V^2 D^2}\right)_{\mathrm{prototipo}}$$

$\Rightarrow$

$$F_p = F_m \, \frac{\rho_p}{\rho_m} \, \frac{V_p^2}{V_m^2} \, \frac{D_p^2}{D_m^2} = 24.82 \, \frac{1028.4}{1.23} \, \frac{(2.57)^2}{(47.8)^2} \, \frac{(0.3)^2}{(0.15)^2} = 240 \, N$$

8.5 Semejanza basada en las ecuaciones que gobiernan el fenómeno

El éxito del análisis dimensional depende fundamentalmente de la selección adecuada de las variables involucradas en un fenómeno dado y tiene, por lo tanto, un cierto grado de incertidumbre. Las conclusiones con respecto a la semejanza entre dos fenómenos que de el extraigan, incorporan, por lo tanto, este grado de incertidumbre. Este nivel de incertidumbre disminuye con la experiencia que se tenga acerca de los fenómenos estudiados.

Una forma más rigurosa para determinar las condiciones necesarias bajo las cuales dos flujos sean semejantes es utilizar las ecuaciones diferenciales y las condiciones de borde que gobiernan el flujo. Dos fenómenos físicos serán semejantes si las ecuaciones diferenciales y las condiciones de borde que los gobiernan tienen la misma forma adimensional. En este caso, la semejanza dinámica se obtiene al igualar los coeficientes adimensionales, para el modelo y el prototipo, de las ecuaciones y las condiciones de borde.

Como ejemplo de lo anterior se analizará el caso de un flujo bidimensional, laminar, permanente e incompresible en un plano xy donde la gravedad actúa según el sentido negativo de y. La ecuación de continuidad para este caso es:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{8.1}$$

Las ecuaciones de Navier-Stokes se reducen a:

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) , \tag{8.2}$$

$$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}-\rho g+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right). \tag{8.3}$$

La adimensionalización de las ecuaciones anteriores se realiza dividiendo todas las longitudes por una longitud característica L, las velocidades por una velocidad de referencia V_∞ y la presión por ρV_∞^2. Una característica importante de estas magnitudes es que son constantes. Lo anterior introduce las siguientes variables adimensionales:

$$x^*=\frac{x}{L},\ y^*=\frac{y}{L},\ u^*=\frac{u}{V_\infty},\ v^*=\frac{v}{V_\infty},\ \text{y}\ p^*=\frac{p}{\rho V_\infty^2}.$$

Las ecuaciones adimensionales se obtienen despejando las variables dimensionales (x, y, u, v, p) de las relaciones anteriores y reemplazando en las ecuaciones 8.1, 8.2 y 8.3. Por ejemplo

$$u\frac{\partial u}{\partial x}=(V_\infty u^*)\frac{\partial (V_\infty u^*)}{\partial (x^* L)}=\frac{V_\infty^2}{L}u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*}.$$

Realizando todos los reemplazos se obtiene

$$\frac{V_\infty}{L}\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+\frac{V_\infty}{L}\frac{\partial v^*}{\partial y^*}=0\,, \tag{8.4}$$

$$\frac{\rho V_\infty^2}{L}\left(u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right)=-\frac{\rho V_\infty^2}{L}\frac{\partial p^*}{\partial x^*}+\frac{\mu V_\infty}{L^2}\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}+\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}\right), \tag{8.5}$$

$$\frac{\rho V_\infty^2}{L}\left(u^*\frac{\partial v^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial v^*}{\partial y^*}\right)=-\frac{\rho V_\infty^2}{L}\frac{\partial p^*}{\partial y^*}-\rho g+\frac{\mu V_\infty}{L^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^{*2}}+\frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}}\right). \tag{8.6}$$

Dividiendo la ecuación de continuidad por V_∞/L y las ecuaciones de Navier-Stokes por $\rho V_\infty^2/L$ se obtiene

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+\frac{\partial v^*}{\partial y^*}=0\,, \tag{8.7}$$

$$u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*}=-\frac{\partial p^*}{\partial x^*}+\frac{\mu}{\rho V_\infty L}\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}+\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}\right), \tag{8.8}$$

$$u^*\frac{\partial v^*}{\partial x^*}+v^*\frac{\partial v^*}{\partial y^*}=-\frac{\partial p^*}{\partial y^*}-\frac{gL}{V_\infty^2}+\frac{\mu}{\rho V_\infty L}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^{*2}}+\frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}}\right). \tag{8.9}$$

De la ecuaciones anteriores se ve que dos flujos serán semejantes si las ecuaciones diferenciales anteriores son idénticas para ambos casos. Lo anterior se cumple si los grupos $\mu/\rho V_\infty L$ y gL/V_∞^2 tienen el mismo valor. Analizando estos grupos se ve que corresponden al número de Reynolds y el número de Froude. Por lo tanto, los flujos serán dinámicamente semejantes si tanto el número de Reynolds como el número de Froude son iguales.

Las ecuaciones anteriores son aplicables en el caso donde las fuerzas volumétricas, representadas por la gravedad, son importantes. Este es el caso del estudio del arrastre sobre superficies parcialmente sumergidas, que corresponde al caso de cascos de embarcaciones marítimas.

En los casos donde las fuerzas volumétricas son despreciables, las ecuaciones diferenciales correspondientes no incluirán el término ρg y, por lo tanto, la semejanza dinámica entre dos flujos se obtiene si el número de Reynolds es igual para ambos flujos.