

## Capítulo 9

# Flujo Viscoso en ductos

### 9.1 Experiencia de Reynolds

Reynolds utilizó un montaje como el de la figura 9.1, donde variando la apertura de la válvula se puede regular el caudal volumétrico que pasa por el tubo, y por lo tanto la velocidad del flujo. Introduciendo un filamento de tinta en la corriente principal del flujo le permite visualizar los distintos regímenes de escurrimiento que se obtienen para distintas velocidades.

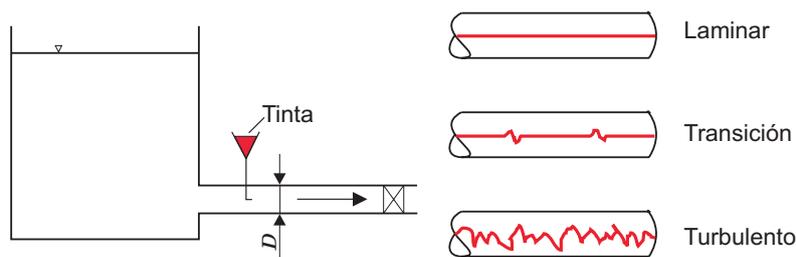


Figura 9.1: Experiencia de Reynolds.

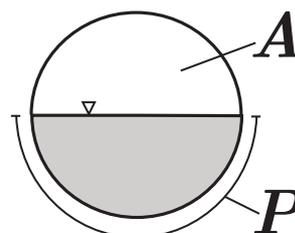
Reynolds caracterizó los distintos tipos de flujo mediante un parámetro adimensional, llamado número de Reynolds, que representa la razón entre las fuerzas de inercia y las viscosas

$$Re = \frac{\text{fuerzas de inercia}}{\text{fuerzas viscosas}} = \frac{\rho V^2 / L}{\mu V / L^2} = \frac{\rho V L}{\mu}$$

donde  $L$  es una longitud característica del escurrimiento. En ductos ésta longitud es el diámetro hidráulico  $D_H$  definido por

$$D_H = \frac{4 \cdot (\text{área de paso})}{\text{perímetro mojado}} = \frac{4A}{P}$$

El perímetro mojado es igual a la parte del perímetro del ducto que se encuentra en contacto con el fluido.



Ducto

Para un tubo de sección circular y que se encuentra lleno de fluido el diámetro hidráulico es igual al diámetro del tubo  $\Rightarrow D_H = D$ .

Reynolds determino los siguientes rangos para los distintos tipos de flujo

$$\begin{aligned} Re &\leq 2300 && \text{flujo laminar} \\ 2300 < Re &\leq 4000 && \text{flujo de transición/crítico} \\ Re &> 4000 && \text{flujo turbulento} \end{aligned}$$

Los valores límites no son exactos y dependen de muchos factores del flujo como de factores externos. Sin embargo, éstos valores son aceptados para realizar cálculos en ingeniería.

## 9.2 Pérdida de Carga

En ésta sección se analizarán las pérdidas en ductos debidas a la fricción, que se llaman pérdidas regulares, y las debidas a cambios puntuales en las condiciones del flujo como por ejemplo un cambio de dirección, una reducción o expansión en el área de paso del flujo, elementos externos como filtros, válvulas, etc.. Estas últimas se denominan pérdidas singulares.

### 9.2.1 Pérdidas regulares

La pérdida de energía por fricción es la energía que se utiliza para vencer los esfuerzos de corte existentes en el sistema. De un análisis dimensional resulta que

$$\Delta P_R = \phi \left( \frac{\rho V D}{\mu}, \frac{L}{D}, \frac{e}{D} \right) \frac{1}{2} \rho V^2$$

donde  $L$  es el largo de la sección de tubería analizada,  $D$  el diámetro y  $e$  la rugosidad media de la pared del tubo. El cociente  $e/D$  se llama rugosidad relativa. Como las pérdidas deben ser directamente proporcionales a la longitud recorrida por el fluido, el

término  $L/D$  puede sacarse de la función  $\phi$  obteniéndose

$$\Delta P_R = \frac{L}{D} f \left( \frac{\rho V D}{\mu}, \frac{e}{D} \right) \frac{1}{2} \rho V^2$$

La función  $f$  se denomina coeficiente o factor de fricción

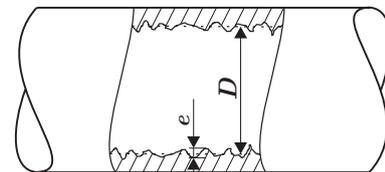
$\Rightarrow$

$$\Delta P_R = \frac{L}{D} f \frac{1}{2} \rho V^2$$

La ecuación anterior es válida tanto para un flujo laminar como turbulento. La diferencia reside en como evaluar el factor de fricción  $f$ .

Para un flujo laminar se determina que

$$f = \frac{64}{Re}$$



Rugosidad de un ducto

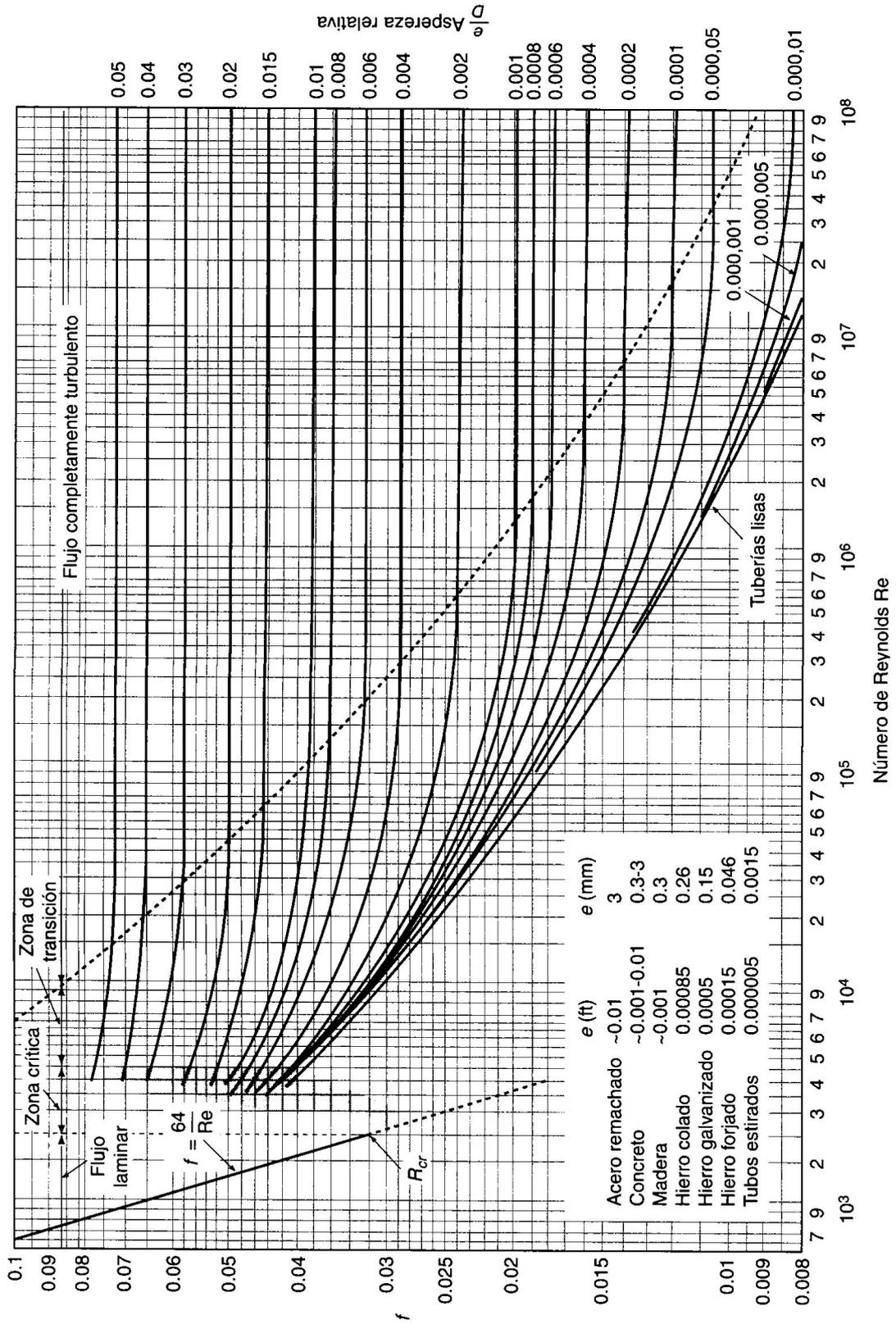


Figura 9.2: Diagrama de Moody.

Se puede ver que para un flujo laminar el factor de fricción no depende de la rugosidad relativa.

Para flujos turbulentos los valores de  $f$  han sido determinados experimentalmente y se encuentran representados en forma gráfica. El gráfico más utilizado es el diagrama de Moody que se muestra en la figura 9.2. Las variables de entrada de éste gráfico son el número de Reynolds y la rugosidad relativa  $e/D$  o su inverso  $D/e$ . En éste diagrama es posible distinguir tres zonas que representan los tres tipos de flujo (laminar, transición, turbulento). En la zona de transición no es posible, por lo general, determinar el factor de fricción. La zona turbulenta presenta 2 subregiones

- zona de turbulencia en desarrollo, donde  $f$  depende tanto de la rugosidad relativa como de el número de Reynolds, y
- zona de turbulencia completamente desarrollada, donde  $f$  solo depende de la rugosidad relativa.

Como se puede apreciar de la figura, éstas dos zonas se encuentran separadas por la línea punteada. La curva inferior, en la zona turbulenta, representa el factor de fricción para tuberías lisas, es decir tuberías para las cuales  $e = 0$ .

Además de las representaciones gráficas existentes para determinar el factor de fricción existen actualmente las siguientes relaciones matemáticas para los distintos tipos de flujo:

flujo laminar

$$f = \frac{64}{Re}$$

tubo liso

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 0.86 \ln (Re\sqrt{f}) - 0.8.$$

Para el flujo turbulento se cuenta con la ecuación implícita de Colebrook, dada por

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log \left( \frac{e/D}{3.7} + \frac{2.51}{Re\sqrt{f}} \right)$$

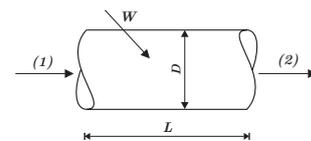
o

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -0.86 \ln \left( \frac{e/D}{3.7} + \frac{2.51}{Re\sqrt{f}} \right)$$

y la ecuación explícita de Swamee y Jain dada por

$$f = \frac{0.25}{\left[ \log \left( \frac{e/D}{3.7} + \frac{5.74}{Re^{0.9}} \right) \right]^2}.$$

La ecuación de balance de energía tomará, para una tubería o ducto de largo  $L$  y diámetro  $D$  como el de la figura, la siguiente forma



Balance de energía para un ducto

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 + \rho g z_1 \pm \frac{\dot{W}}{Q} - f \left( \frac{L}{D} \right) \frac{1}{2}\rho V_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \rho g z_2.$$

### 9.2.2 Pérdidas singulares

Además de las pérdidas regulares o por fricción los elementos adicionales existentes en todo sistema de tuberías, como por ejemplo válvulas, codos, expansiones, etc., introducen pérdidas energéticas adicionales. Los fenómenos de disipación energética, que tienen lugar en éstos elementos, son tan complejos que sólo pueden ser determinados, en forma efectiva, experimentalmente y se representan mediante un factor de pérdida singular  $k$ . La pérdida de carga se representa, al igual que en el caso de pérdidas regulares, como una pérdida de la energía cinética del fluido mediante la siguiente relación

$$\Delta P_S = k \frac{1}{2} \rho V^2.$$

Los valores de  $k$  para los distintos elementos pueden ser encontrados en forma de gráficos o tablas. En la figuras 9.3(a) y 9.3(b) se muestra a modo de ejemplo los gráficos para determinar  $k$  para un codo y una expansión respectivamente.

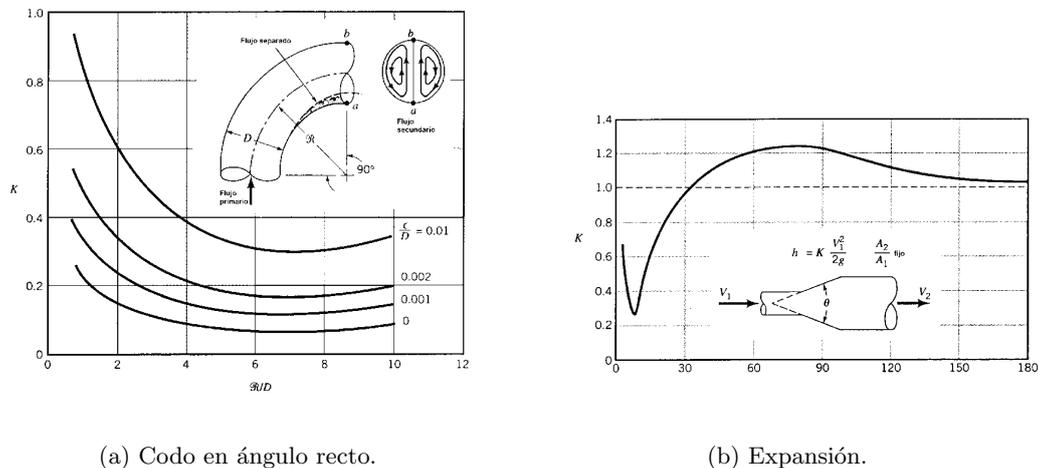


Figura 9.3: Coeficiente de pérdida singular de carga  $k$ .

Las pérdidas singulares se pueden expresar también como un equivalente en largo de tubería

$$\Delta P_S = k \frac{1}{2} \rho V^2 = f \frac{L_{eq}}{D} \frac{1}{2} \rho V^2,$$

de donde

$$L_{eq} = \frac{k D}{f}.$$

Es decir, que longitud de tubería produce la misma pérdida de carga que el elemento considerado.  $D$  y  $f$  corresponden a los valores para la tubería que contiene el elemento de pérdida singular.

## 9.3 Sistema de tuberías

En la mayoría de los sistemas de tuberías existe más de una tubería, las cuales pueden variar en diámetro, longitud, material, etc.. Estas se encuentran además distribuidas tanto en serie como

en paralelo. Si bien los mecanismos que gobiernan el flujo en éstos sistemas son los mismos que lo hacen para una tubería simple, la cantidad de variables e incógnitas a definir hacen que la complejidad para resolver estos circuitos sea mayor.

### 9.3.1 Tuberías en serie

Para los sistemas de tubería en serie, como el que se muestra en la figura, se cumple que

$$Q_1 = Q_2 = Q_3$$

y

$$\Delta P_{R,AB} = \Delta P_{R,1} + \Delta P_{R,2} + \Delta P_{R,3},$$

donde los  $\Delta P_{R,i}$  dependerán de las condiciones de flujo en cada tramo  $i$ . Para éste tipo de sistemas existen los siguientes 3 tipos básicos de problemas de los cuales se derivan problemas más complejos.

1. Dado un flujo y el circuito de tuberías se debe determinar la caída de presión.
2. Dada la caída de presión entre dos puntos y la geometría del circuito se debe determinar el caudal.
3. Dado el caudal que debe establecerse entre dos puntos y la caída de presión admisible se debe determinar el diámetro de la tubería para cumplir con las especificaciones.

### Ejemplo

Por el sistema de la figura 9.4 deben circular  $0.002 \text{ m}^3/\text{s}$  de agua a  $10^\circ\text{C}$ . La tubería tiene un largo total de  $20 \text{ m}$  con una rugosidad media de  $e = 0.26 \text{ mm}$ . Los codos son todos iguales y tienen un coeficiente de pérdida  $k = 1.5$  cada uno. El coeficiente de pérdida de la entrada y la salida de la tubería es  $0.5$  y  $1.0$  respectivamente. Se pide determinar el diámetro  $D$  del tubo. Se supone que los estanques son suficientemente grandes como para que el nivel de la superficie

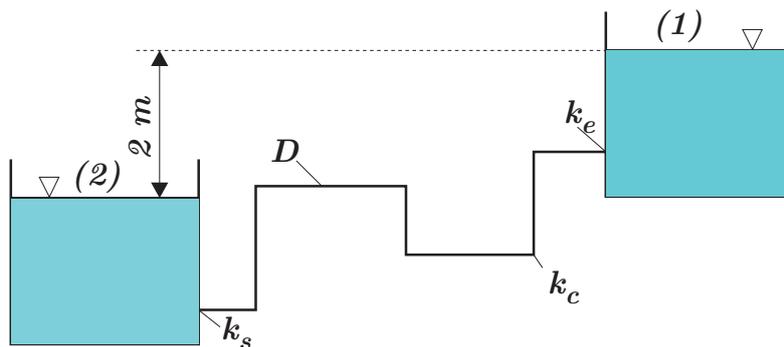


Figura 9.4: Sistema de tuberías en serie.

se mantenga constante. Un balance de energía entre ambas superficies de los estanques entrega la siguiente ecuación

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \Delta P_R + \Delta P_S$$

De las condiciones del problema se obtiene que  $p_1 = p_2 = p_{\text{atm}}$ ,  $V_1 = V_2 = 0$  y  $z_1 - z_2 = 2$   
 $\Rightarrow$

$$\rho g(z_1 - z_2) = f \frac{L}{D} \frac{1}{2} \rho V^2 + \sum k \frac{1}{2} \rho V^2$$

$$\rho g(z_1 - z_2) = \frac{1}{2} \rho V^2 \left( f \frac{L}{D} + \sum k \right).$$

Reemplazando los valores se obtiene

$$9.81 \cdot 2 = \frac{V^2}{2} \left( f \frac{20}{D} + 6 \cdot 1.5 + 0.5 + 1.0 \right).$$

La velocidad se obtiene del caudal y el área de paso del tubo

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{0.002}{\pi D^2/4}$$

$$V = \frac{2.55 \cdot 10^{-3}}{D^2}.$$

Reemplazando y reordenando se obtiene finalmente

$$6.03 \cdot 10^6 D^5 - 10.5 D - 20 f = 0. \quad (9.1)$$

El número de Reynolds, necesario para determinar  $f$ , es también una función de  $D$

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{V D}{\nu} = \frac{2.55 \cdot 10^{-3} D}{D^2 \cdot 1.307 \cdot 10^{-6}}$$

$$Re = \frac{1.95 \cdot 10^3}{D}. \quad (9.2)$$

La rugosidad relativa queda

$$\frac{e}{D} = \frac{2.6 \cdot 10^{-4}}{D}, \quad (9.3)$$

donde  $e$  debe ser expresado en metros. Las ecuaciones 9.1, 9.2 y 9.3 más una forma (diagrama de Moody, ecuación de Coloebrook) para determinar  $f$  a partir del número de Reynolds y la rugosidad relativa, representan el sistema de ecuaciones a resolver.

Los caminos para resolver éste sistema de ecuaciones son

- asumir un valor para  $f$ , resolver la ecuación 9.1 obteniendo un valor para  $D$ , recalculer un nuevo  $f$  a partir del número de Reynolds y la rugosidad relativa e iterar hasta que el sistema converja.
- asumir un valor para  $D$ , calcular  $f$  a partir de 9.1 y de la forma gráfica o funcional utilizada para determinar  $f$ , comparar los resultados e iterar con  $D$  hasta que el sistema converja.

Utilizando el segundo de los caminos (dado que de ésta manera se evita resolver la ecuación de quinto orden) se asume  $D = 0.05 \text{ m}$ . De 9.1 se obtiene  $f = 0.068$ . De 9.2 y 9.3 se obtiene  $Re = 3.9 \cdot 10^4$  y  $e/D = 5.2 \cdot 10^{-3}$  con lo cual del diagrama de Moody se obtiene  $f = 0.033$  lo cual es distinto al valor obtenido anteriormente por lo que se debe modificar el valor de  $D$ . Iterando se obtiene finalmente

$$D \approx 0.045 \text{ m} = 45 \text{ mm}.$$

### Ejemplo

Petróleo crudo es bombeado a través de Alaska por una tubería de 799 millas de longitud y 4 ft de diámetro. El caudal máximo es de  $Q = 2.4$  millones de barriles diarios lo que equivale a  $117 \text{ ft}^3/\text{s}$ . Determine la potencia necesaria para cumplir con los requerimientos. Datos:  $e = 0.0015 \text{ ft}$ ,  $\mu = 8 \cdot 10^{-5} \text{ lbs}/\text{ft}^2$ ,  $\gamma = 53.7 \text{ lb}/\text{ft}^3$ .

La ecuación de balance de energía, expresada en términos de longitud, para éste sistema es

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 + H_B = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + \Delta H_R$$

donde  $H_B$  es la potencia de bombeo expresada en unidades de longitud. Del enunciado se puede asumir que  $p_1 = p_2$ ,  $V_1 = V_2 = 0$  y que  $z_1 = z_2$ , de donde la ecuación anterior queda

$$H_B = \Delta H_R = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

La velocidad se obtiene del caudal y el área de paso

$$V = \frac{Q}{A} = 9.31 \text{ ft/s}$$

$\Rightarrow$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{e}{D} = 0.0000375 \\ Re = 7.76 \cdot 10^5 \end{array} \right\} \Rightarrow f = 0.0125$$

Reemplazando se obtiene

$$H_B = 0.0125 \left(1.05 \cdot 10^6\right) \cdot \frac{9.31^2}{2 \cdot 32.2}$$

$$H_B = 17700 \text{ ft}$$

de donde la potencia se obtiene como

$$\dot{W} = \gamma Q H_B = 53.7 \cdot 117 \cdot 17700$$

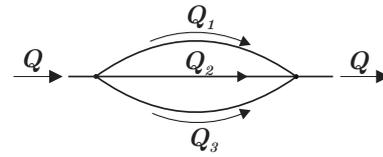
$$\dot{W} = 1.11 \cdot 10^8 \frac{\text{ft lb}}{\text{s}} \cdot \left(\frac{1 \text{ hp}}{550 \text{ ft lb/s}}\right)$$

$$\dot{W} = 220000 \text{ hp}.$$

Se ve que éste valor es excesivamente alto y no puede ser aportado por una sola bomba por lo que se requieren varias bombas para lograr el objetivo.

### 9.3.2 Sistema de tuberías en paralelo

Un sistema de tuberías en paralelo es básicamente un número de tuberías conectadas en dos puntos del sistema como se muestra en la figura. Cada rama del sistema tiene asociado componentes de pérdida singular ( $\sum k$ ). Como las condiciones iniciales y finales



Tuberías en paralelo

de cada rama son idénticas se debe cumplir que las pérdidas de carga por cada rama sean iguales, es decir

$$\Delta P_1 = \Delta P_2 = \dots = \Delta P_n$$

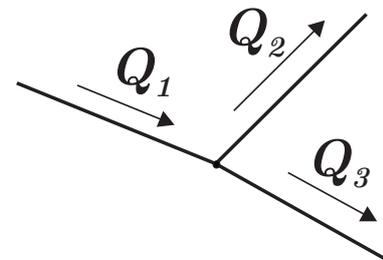
donde  $n$  es el número de ramas del sistema. Otra forma de ver lo anterior es que por cualquier camino cerrado que se recorra a partir de un punto la pérdida de carga debe ser cero. Por continuidad se debe cumplir además que

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n.$$

Las incógnitas en las ecuaciones anteriores son los caudales que fluyen por cada rama  $Q_i$  y la pérdida de carga entre los nudos  $\Delta P_{AB}$ . La cantidad de fluido que recorre cada rama depende de la resistencia al flujo en la rama en relación con la resistencia en las otras ramas. La resolución de sistemas de dos tubos en paralelo es relativamente simple. Para sistemas con más de dos ramificaciones la complejidad aumenta debido a que existen más incógnitas que ecuaciones. Para éste tipo de sistemas se han desarrollado varios métodos iterativos de solución como por ejemplo el método de Hardy-Cross. La solución de éste tipo de sistemas queda fuera del alcance de estos apuntes por lo que no se tratará.

### 9.3.3 Ramificaciones

Otro tipo de disposición o arreglo de tuberías que es posible encontrar en la práctica es un sistema de tuberías ramificadas como el que se muestra en la figura. Si no existen elementos direccionadores de flujo el sentido que adquiere el flujo en alguna de las ramas no es obvia, por lo que parte de la solución del problema es determinar el sentido del flujo en alguna de las ramas.



Tuberías ramificadas

Suponiendo conocidas las condiciones en los extremos de cada rama, las incógnitas son los flujos o caudales  $Q_i$  que pasan por cada rama y las condiciones que se establecen en el punto de intersección de las ramas, punto que es coincidente para cada rama. Además la ecuación de continuidad para el punto de intersección queda

$$\sum Q_i = 0$$

donde  $Q_i$  es el caudal que pasa por la rama  $i$ .

#### Ejemplo

Para el circuito mostrado en la figura 9.5 determine el flujo que se establece en cada una de las ramas si el factor de fricción tiene un valor 0.02 en cada rama.

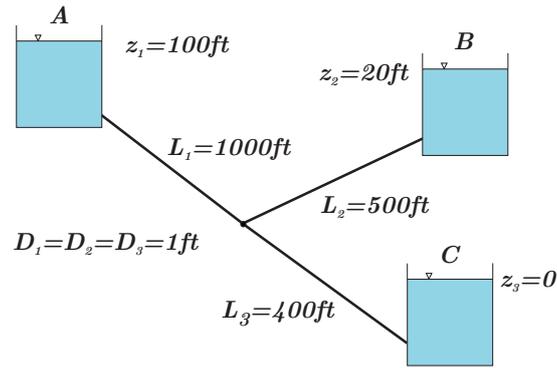


Figura 9.5: Sistema de tuberías en ramificadas.

Supondremos que el flujo fluye desde el estanque A a los estanques B y C. Por continuidad se obtiene por lo tanto que

$$Q_1 = Q_2 + Q_3$$

$$V_1 A_1 = V_2 A_2 + V_3 A_3$$

y como por las condiciones del problema se tiene que  $A_1 = A_2 = A_3 \Rightarrow$

$$V_1 = V_2 + V_3 . \quad (9.4)$$

Aplicando la ecuación de balance energético entre los puntos A y B y entre los puntos A y C se obtiene

$$\rho g z_A = \rho g z_B + f_1 \frac{L_1}{D} \frac{1}{2} \rho V_1^2 + f_2 \frac{L_2}{D} \frac{1}{2} \rho V_2^2$$

y

$$\rho g z_A = \rho g z_C + f_1 \frac{L_1}{D} \frac{1}{2} \rho V_1^2 + f_3 \frac{L_3}{D} \frac{1}{2} \rho V_3^2 .$$

Reemplazando los valores numéricos del problema se obtiene

$$258 = V_1^2 + 0.5 V_2^2 \quad (9.5)$$

$$322 = V_1^2 + 0.4 V_3^2 \quad (9.6)$$

El sistema de ecuaciones a resolver está conformado por las ecuaciones 9.4, 9.5 y 9.6. Sustrayendo la ecuación 9.5 de la ecuación 9.6 se obtiene

$$V_3 = \sqrt{160 + 1.25 V_2^2} .$$

Reemplazando la ecuación 9.4 y el resultado anterior en la ecuación 9.5 se obtiene

$$258 = (V_2 + V_3)^2 + 0.5 V_2^2 = \left( V_2 + \sqrt{160 + 1.25 V_2^2} \right)^2 + 0.5 V_2^2$$

de donde desarrollando, elevando al cuadrado ambos lados de la ecuación resultante y reordenando se obtiene la siguiente ecuación para  $V_2$

$$V_2^4 - 460 V_2^2 + 3748 = 0$$

que tiene como soluciones  $V_2 = 21.3 \text{ ft/s}$  y  $V_2 = 2.88 \text{ ft/s}$ . La primera de las soluciones es una solución introducida al elevar al cuadrado en el paso anterior por lo que la solución válida es la segunda, es decir  $V_2 = 2.88 \text{ ft/s}$ . Reemplazando y resolviendo las demás velocidades resultan  $V_1 = 15.9 \text{ ft/s}$  y  $V_2 = 13.02 \text{ ft/s}$ . Con éste resultado el valor de los caudales por las distintas ramas resulta  $Q_1 = 12.5 \text{ ft}^3/\text{s}$ ,  $Q_2 = 2.26 \text{ ft}^3/\text{s}$  y  $Q_3 = 10.2 \text{ ft}^3/\text{s}$ . Si al comienzo de la resolución se supone que existe un flujo de B a C el sistema de ecuaciones obtenido no tiene solución real.

## 9.4 Flujo no permanente en tuberías

Los flujos no permanentes en tuberías están tradicionalmente asociados a plantas hidroeléctricas y sistemas de distribución de líquidos, como agua y petróleo, por tuberías a largas distancias. Sin embargo estos aparecen en muchas otras situaciones prácticas. Para la existencia de un flujo no permanente es necesario que exista algún fenómeno o excitación en el sistema que cambie las condiciones de flujo permanente. Este tipo de excitaciones se producen, por ejemplo, con el cierre o apertura de válvulas, el encendido o apagado de bombas o turbinas, la ruptura de tubos y la aparición del fenómeno de cavitación. De acuerdo a las características de la excitación y de su influencia sobre la compresibilidad del fluido y la deformación de la tubería se obtienen dos tipos de flujos no permanentes básicos que son el golpe de ariete y el flujo oscilatorio. En el primero de los fenómenos mencionados anteriormente, la elasticidad del material del ducto como la compresibilidad del líquido desempeñan un papel importante, mientras que en el segundo se supone que la tubería es rígida y el líquido incompresible. A continuación se analizarán sólo los aspectos fundamentales de éstos fenómenos.

### 9.4.1 Golpe de ariete

El golpe de ariete es un fenómeno que aparece en tuberías causado por una obstrucción repentina parcial o total al paso del flujo. Esto puede suceder por ejemplo al cerrar una válvula en forma rápida, con la detención de una bomba, etc.. En estos casos el líquido no se comporta como incompresible ni la tubería como rígida. La interacción de los cambios de cantidad de movimiento y las fuerzas aplicadas hacen que el fluido se comprima ligeramente y que la tubería experimente deformaciones. Lo anterior puede llevar a cambios de presión significativos y a un flujo oscilatorio del fluido dentro de la tubería, fenómeno que se llama golpe de ariete.

#### Velocidad de propagación $a$

Al obstruir el paso de un flujo en forma repentina se producen perturbaciones en la presión y la velocidad del flujo. Estas perturbaciones se desplazan en forma ondulatoria dentro de un tubo a velocidades cercanas a la velocidad del sonido, como se verá a continuación. Además la acción ondulatoria resultante ocurre a frecuencias muy altas. Dada la existencia de la onda de presión que se mueve dentro del volumen de control de la figura 9.6, éste no es inercial. Transformamos éste VC a uno inercial suponiendo que la onda es estacionaria dentro del VC para un observador que se mueve con la misma velocidad.

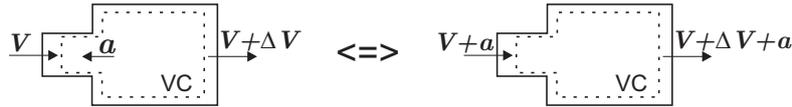
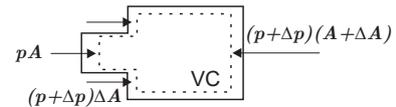


Figura 9.6: Velocidad de propagación de una onda de presión para un volumen de control estacionario y para uno que se mueve con la velocidad de la onda.

La ecuación de continuidad para el nuevo volumen de control queda

$$(\rho + \Delta\rho)(V + \Delta V + a)(A + \Delta A) - \rho(V + a)A = 0.$$

Si se desprecian los efectos viscosos, la ecuación de cantidad de movimiento resulta



Fuerzas externas sobre el volumen de control

$$pA + (p + \Delta p)\Delta A - (p + \Delta p)(A + \Delta A) = \rho A(V + a)[V + \Delta V + a - (V + a)].$$

Desarrollando las ec. anteriores y despreciando los términos de orden  $\Delta^2$  y superiores se obtiene

$$\rho A \Delta V + (V + a)(A + \Delta\rho + \rho \Delta A) = 0$$

y

$$-A \Delta p = \rho A(V + a) \Delta V.$$

Si además se supone que  $V \ll a$ , lo que es una suposición aceptable, se obtiene

$$\Delta p = -\rho a \Delta V$$

que se denomina ec. de Joukowsky. Esta ecuación relaciona el cambio de presión con el cambio de velocidad experimentado por el fluido y la velocidad de propagación de la onda en el fluido. El signo negativo indica que  $\Delta p$  y  $\Delta V$  tienen sentidos opuestos.

Las condiciones alteradas ( $p + \Delta p$ ,  $\rho + \Delta\rho$ , etc.) se mantienen en el volumen de control después de que la onda lo atraviesa completamente. La onda se refleja al final (o inicio) del tubo produciéndose un flujo ondulatorio.

Combinando la ecuación de continuidad y de cantidad de movimiento e imponiendo la condición  $V \ll a$  se obtiene

$$\frac{\Delta p}{\rho a^2} = \frac{\Delta\rho}{\rho} + \frac{\Delta A}{A}. \tag{9.7}$$

Mediante el módulo de elasticidad volumétrica ( $E_v$ ), visto en el capítulo 1, se puede relacionar el cambio de densidad experimentado por una variación de la presión por

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta p}{E_v}.$$

Considerando una respuesta elástica del material de la tubería se puede relacionar el cambio de sección  $\Delta A$  con el cambio en la presión  $\Delta p$  mediante el módulo de elasticidad  $E$  del material dado por

$$E = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\epsilon}$$

donde  $\sigma$  es el esfuerzo circunferencial y  $\epsilon$  es la de deformación circunferencial de la pared del tubo, es decir

$$\Delta\epsilon = \frac{\Delta A}{A} = 2 \frac{\Delta r}{r}$$

donde  $r$  es diámetro del tubo. Para una pared delgada ( $e \ll r$ ) resulta que

$$\sigma = \frac{pr}{e}$$

donde  $e$  es el espesor de la pared. Para cambios pequeños de  $r$  y  $e$  se tendrá por lo tanto que

$$\Delta\sigma = \Delta p \frac{r}{e}.$$

Reemplazando en el módulo de elasticidad  $E$  se obtiene

$$E = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\epsilon} \approx \frac{(r/e) \Delta p}{\Delta r/r} = \frac{(2r/e) \Delta p}{\Delta A/A}.$$

Despejando  $(\Delta A/A)$  e introduciéndolo en la ecuación 9.7 se obtiene

$$\frac{\Delta p}{\rho a^2} = \frac{\Delta p}{E_v} + \frac{2r\Delta p}{eE},$$

de donde

$$a = \sqrt{\frac{E_v/\rho}{1 + \frac{D}{e} \frac{E_v}{E}}}, \quad (9.8)$$

que es la velocidad de propagación de la onda de presión en un líquido compresible y un tubo deformable. Se ve que  $a$  está relacionada tanto con las propiedades del fluido ( $\rho$  y  $E_v$ ) como con las del tubo ( $D$ ,  $e$ ,  $E$ ). Se puede apreciar además que la elasticidad del tubo tiene como efecto una disminución de la velocidad de propagación  $a$ . Para tubos muy rígidos se cumple que  $E \rightarrow \infty$  por lo que

$$a = \sqrt{\frac{E_v}{\rho}}$$

que es, como se vio en el capítulo 1, la velocidad del sonido en un líquido.

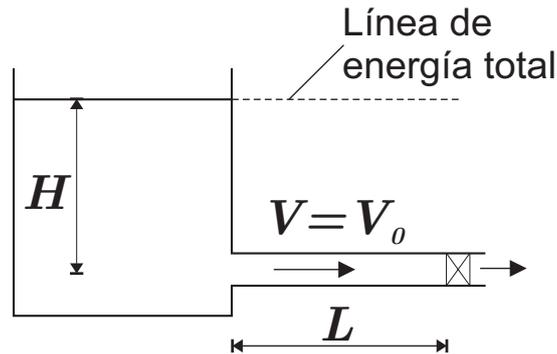


Figura 9.7:

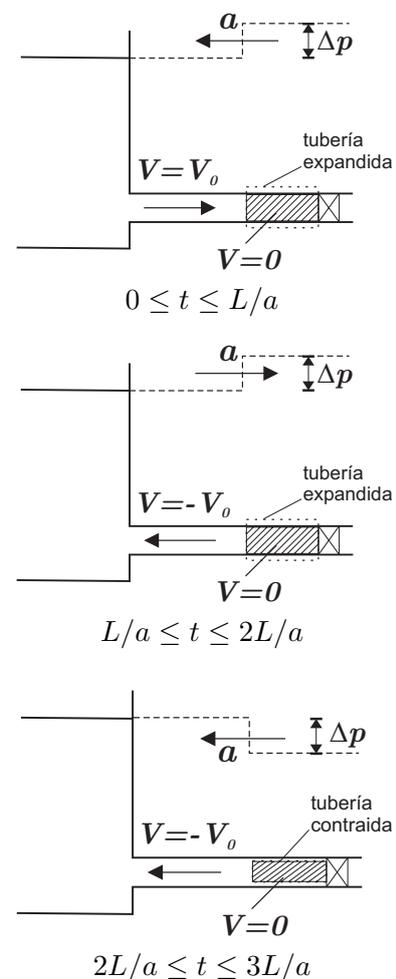
### Ciclo de movimiento en el golpe de ariete

Explicaremos el ciclo de movimiento que se produce en un ducto como el de la figura 9.7 cuando la válvula se cierra repentinamente. Se despreciarán en esta explicación los efectos viscosos.

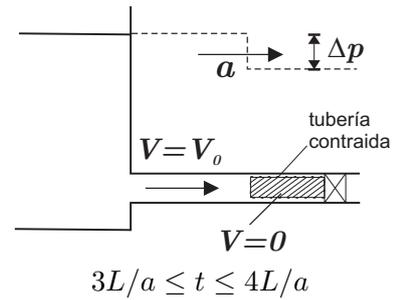
En  $t = 0$  la válvula se cierra completamente en forma instantánea. El líquido que se encuentra inmediatamente contiguo a la válvula se frena hasta tener una velocidad igual a cero. Por conservación de energía, la presión aumenta en  $\Delta p$ . Este fenómeno se repite y propaga aguas arriba por la tubería. El líquido detrás de la onda de presión queda comprimido y la tubería expandida.

En  $t = L/a$  la onda llega al depósito y se produce un desbalance de fuerzas en la entrada del tubo. En el tubo la presión se reduce a la presión del depósito y la velocidad cambia de dirección, es decir fluye del tubo al recipiente. Este fenómeno se propaga aguas abajo a la velocidad  $a$ . En  $t = 2L/a$  la onda llega a la válvula. En ese momento la velocidad en todos los puntos del tubo es  $-V_0$  y la presión es la presión original  $p$ .

Como la válvula se encuentra cerrada la velocidad "aumenta" hasta tener un valor cero y la presión se reduce en  $\Delta p$ . Esta onda de baja presión viaja aguas arriba con velocidad  $a$ . Detrás de la onda el líquido se encuentra expandido y la tubería contraída. Si la presión detrás de la onda se reduce por debajo de la presión de vapor parte del líquido se evaporará produciéndose el fenómeno de cavitación.



En  $t = 3L/a$  la onda alcanza nuevamente el estanque produciéndose un desbalance de fuerzas de magnitud opuesta al producido para  $t = L/a$ . Para reestablecer el equilibrio la presión aumenta en  $\Delta p$  y se produce un flujo con una velocidad  $V = V_0$ . Este efecto se propaga aguas abajo por la tubería. En  $t = 4L/a$  las condiciones iniciales vuelven a prevalecer en todo el tubo, por lo que se cierra un ciclo. Este proceso se repite por lo tanto cada  $4L/a$  segundos.



En condiciones reales, es decir donde la fricción no es despreciable, donde existe movimiento de la tubería y con un comportamiento no elástico del material del tubo, se produce un amortiguamiento de la oscilación y el flujo finalmente se detendrá.

Si el cierre de la válvula se realiza en un tiempo menor que  $2L/a$  se dice que el cierre es rápido. Si el tiempo de cierre es mayor se llama cierre lento.

### Ecuaciones diferenciales para el golpe de ariete

Para determinar las ecuaciones que describen el movimiento en el golpe de ariete se utilizan las ecuaciones de cantidad de movimiento lineal y continuidad. Como variables independientes se considerarán el tiempo  $t$  y la posición  $x$ ,  $\Rightarrow V = V(x, t)$ ,  $p = p(x, t)$ ,  $A = A(x, t)$ .

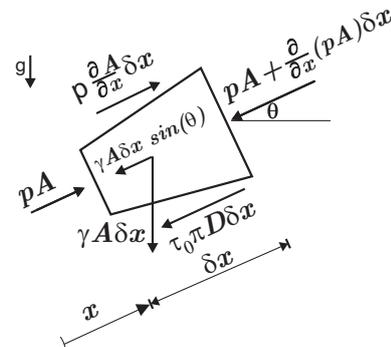
**Cantidad de movimiento.** La ecuación de cantidad de movimiento es

$$pA - \left[ pA + \frac{\partial pA}{\partial x} \delta x \right] + p \frac{\partial A}{\partial x} \delta x - \gamma A \delta x \sin \theta - \tau_0 \pi D \delta x = \rho A \delta x \frac{dV}{dt}$$

Dividiendo por  $\delta m = \rho A \delta x$  y simplificando se obtiene:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - g \sin \theta - \frac{4 \tau_0}{\rho D} = \frac{dV}{dt}$$

Suponiendo un régimen turbulento y permanente se puede utilizar  $\tau_0 = \rho f V^2 / 8$  para representar el esfuerzo de corte en función del factor de fricción  $f$ . Para conservar el signo de  $V$ , ya que en el golpe de ariete el sentido del flujo cambia, se utiliza  $V^2 = V|V|$ . Reemplazando y reordenando se obtiene la siguiente ecuación diferencial



Elemento diferencial

$$\frac{dV}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g \sin \theta + \frac{fV|V|}{2D} = 0$$

En aplicaciones de golpe de ariete el término  $V \frac{\partial V}{\partial x}$  es despreciable con respecto al término  $\frac{\partial V}{\partial t}$ , es decir  $V \frac{\partial V}{\partial x} \ll \frac{\partial V}{\partial t}$ , por lo que la derivada total de la velocidad será

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t}$$

Reemplazando se obtiene finalmente

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g \sin \theta + \frac{f V |V|}{2D} = 0. \quad (9.9)$$

**Ecuación de continuidad** La ecuación de continuidad aplicada al volumen de control de la figura es

$$-\frac{\partial}{\partial x} (\rho AV) \delta x = \frac{\partial}{\partial t} (\rho A \delta x)$$

$$\underbrace{\frac{V}{A} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial t}}_{\frac{1}{A} \frac{dA}{dt}} + \underbrace{\frac{V}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t}}_{\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

El término  $\frac{1}{A} \frac{dA}{dt}$  está relacionado con la elasticidad de la pared del tubo y la velocidad de deformación. El término  $\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$  está relacionado con la compresibilidad del líquido.

Se puede demostrar que

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dt} = \frac{D}{e E} \frac{dp}{dt}$$

donde  $D$ ,  $e$  y  $E$  son el diámetro del tubo, el espesor de la pared del tubo y el módulo de elasticidad o módulo de young del material del tubo respectivamente. Por otro lado tenemos que

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{E_v} \frac{dp}{dt}$$

Reemplazando se obtiene

$$\underbrace{\frac{1}{E_v} \left( 1 + \frac{E_v D}{E e} \right)}_{1/\rho a^2} \frac{dp}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{\rho a^2} \frac{dp}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0.$$

Desarrollando la derivada total de  $p$  y despreciando las derivadas espaciales con respecto a las derivadas temporales, es decir,  $\frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial t}$ , se obtiene finalmente

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho a^2 \frac{\partial V}{\partial x} = 0. \quad (9.10)$$

Las ecuaciones 9.9 y 9.10 representan las ecuaciones de movimiento para el golpe de ariete. Estas ecuaciones deben ser resueltas en forma numérica.

### 9.4.2 Oscilaciones en tuberías

En ésta sección se analizará el flujo oscilatorio producido en una tubería. Se supondrá que el flujo es incompresible y que las tuberías son inelásticas. Consideraremos sólo el caso más sencillo para el cual se supone que los efectos viscosos son despreciables.

Para el tubo en U de la figura, la ecuación de Euler para un flujo no permanente y para un sistema coordenado que sigue el tubo, queda

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + g \frac{\partial z}{\partial s} + V \frac{\partial V}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial t} = 0.$$

Integrando entre 1 y 2 se obtiene

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho} + g(z_2 - z_1) + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \int_1^2 \frac{\partial V}{\partial t} ds = 0.$$

Como  $p_1 = p_2$  y  $V_1 = V_2$ ,  $\frac{\partial V}{\partial s}$  es independiente de  $s$  por lo que

$$\int_1^2 \frac{\partial V}{\partial t} ds = \frac{\partial V}{\partial t} \int_1^2 ds = \frac{\partial V}{\partial t} l.$$

Reemplazando obtenemos

$$g(z_2 - z_1) = -l \frac{\partial V}{\partial t}.$$

Por otro lado y analizando la figura se tiene que  $g(z_2 - z_1) = 2gz$  y de la definición de velocidad  $\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{d^2 z}{dt^2}$  por lo que se obtiene la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{2g}{l} z = 0,$$

que tiene la siguiente solución general

$$z = C_1 \cos \sqrt{\frac{2g}{l}} t + C_2 \sin \sqrt{\frac{2g}{l}} t,$$

donde  $C_1$  y  $C_2$  son constantes de integración. Si en  $t = 0$  se cumple que  $z = z'$  y  $dz/dt = 0$  entonces  $C_1 = z'$  y  $C_2 = 0 \Rightarrow$

$$z = z' \cos \sqrt{\frac{2g}{l}} t$$

que representa la ecuación de un movimiento armónico simple con un periodo  $2\pi\sqrt{l/2g}$ .

