MA57C Control Óptimo. Semestre 2007-2
Profesor: Rafael Correa **Auxiliares:** Jorge Lemus, Oscar Peredo.

Clase Auxiliar #3

16 de Agosto del 2007

1. Función de Transferencia y Estabilidad Asintótica

Primero estudiemos el concepto de Función de Transferencia para el sistema:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{1}$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \tag{2}$$

Tomando Transformada de Laplace en la primera ecuación, se obtiene:

$$\begin{aligned} s\mathbf{X}(s) &= A\mathbf{X}(s) + B\mathbf{U}(s) \\ (sI - A)\mathbf{X}(s) &= B\mathbf{U}(s) \\ \mathbf{X}(s) &= (sI - A)^{-1}B\mathbf{U}(s) \end{aligned}$$

Reemplazando lo anterior en la segunda ecuación, pasada por la Transformada de Laplace:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(s) &= C(sI - A)^{-1}B\mathbf{U}(s) + D\mathbf{U}(s) \\ \mathbf{Y}(s) &= \left\{C(sI - A)^{-1}B + D\right\}\mathbf{U}(s) \end{aligned}$$

Definición 1.1. *La Función de Transferencia del sistema (1)-(2) se define como*

$$\mathbf{G}(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Recordemos la definición de estabilidad asintótica:

Definición 1.2. *El sistema (1)-(2) es asintóticamente estable en el estado $x = x_0$ si $\lim_{t\to+\infty} x(t) = x_0$.*

Supongamos que $\mathbf{G}(s) = g(s) \in \mathbb{R}$ y podemos escribirla en forma racional, es decir, con fracciones parciales:

$$g(s) = \gamma + \eta \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m_i} \frac{\beta_{i,k}}{(s - \lambda_i)^k}$$

Los valores λ_k son polos de la función $g(s)$. Al tomar antitransformada de Laplace de $g(s)$, se obtiene una función $g(t)$ de la forma:

$$g(t) = \delta(t - \gamma) + \eta \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m_i} \tilde{\beta}_{i,k} t^{k-1} e^{\lambda_i t} H(t)$$

Si los polos λ_i tienen parte real positiva, se tiene

$$\lim_{t \to +\infty} g(t) = +\infty$$

pues $e^{\lambda_i t} \to +\infty$. Luego, una condición necesaria y suficiente para la estabilidad asintótica tiene que ver con el signo de la parte real de los polos de cada celda de $\mathbf{G}(\mathbf{s})$, la función de transferencia.
Si $D = 0$, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(s) &= C(sI - A)^{-1}B \\ &= \frac{1}{\det(sI - A)} C[\mathrm{Adj}(sI - A)]B \end{aligned}$$

Luego, los polos de $\mathbf{G}(s)$ son precisamente los valores propios de A.

Teorema 1.1. *El sistema (1)-(2) es asintoticamente estable sí y sólo sí los valores propios de la matríz A tienen parte real estrictamente negativa.*

2. Criterio de Estabilidad de Routh-Hurwitz

El objetivo de esta clase es entender el criterio de Routh-Hurwitz para chequear la estabilidad de un sistema lineal.

Consideremos un polinomio de grado n con coeficientes reales:

$$D(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_{n-1} z + a_n \tag{3}$$

Definamos los polinomios asociados D_0 y D_1:

Definición 2.1.

$$D_0(z) = a_0^{(0)} z^n + a_1^{(0)} z^{n-2} + a_2^{(0)} z^{n-4} + ... \tag{4}$$

$$D_1(z) = a_0^{(1)} z^{n-1} + a_1^{(1)} z^{n-3} + a_2^{(1)} z^{n-5} + ... \tag{5}$$

donde $a_i^{(0)} = a_{2i}$ y $a_i^{(1)} = a_{2i-1}$ (coeficientes con índice par e impar).

Para chequear la estabilidad del sistema (1)-(2), se construye la Tabla de Routh asociada al polinomio caracteristico de A, $D(z) = \det(A - zI) = 0$:

z^n	$a_0^{(0)}$	$a_1^{(0)}$	...
z^{n-1}	$a_0^{(1)}$	$a_1^{(1)}$	...
z^{n-2}	$a_0^{(2)}$	$a_1^{(2)}$	...
$\vdots$	$\vdots$		
z^2	$a_0^{(n-2)}$	$a_1^{(n-2)}$	
z^1	$a_0^{(n-1)}$		
z^0	$a_0^{(n)}$		

donde la primera y segunda filas son los coeficientes de D_0 y D_1, y las filas restantes se construyen usando la siguiente fórmula:

$$a_i^{(k+2)} = a_{i+1}^{(k)} - \alpha_{k+1} a_{i+1}^{(k+1)}$$

con

$$\alpha_{k+1} = \frac{a_0^{(k)}}{a_0^{(k+1)}} \tag{6}$$

Las 2 primeras filas deben quedar de igual largo, rellenando con ceros en caso de ser necesario (se dejaran vacías las celdas con ceros).
Por ejemplo, si $D(z) = z^4 + 2z^3 + 6z^2 + 4z + 1$, la tabla de Routh es la siguiente:

z^4	1	6	1	
z^3	2	4		$\alpha_1 = 1/2$
z^2	4	1		$\alpha_2 = 2/4$
z^1	3,5			$\alpha_3 = 4/3{,}5$
z^0	1			$\alpha_4 = 3{,}5/1$

La tercera fila se calculó de la forma:

$$\begin{aligned} a_0^{(2)} &= a_1^{(0)} - \alpha_1 a_1^{(1)} \\ &= 6 - \frac{1}{2}4 \\ &= 4 \\ a_1^{(2)} &= a_2^{(0)} - \alpha_1 a_2^{(1)} \\ &= 1 - \frac{1}{2}0 \\ &= 1 \\ a_2^{(2)} &= a_3^{(0)} - \alpha_1 a_3^{(1)} \\ &= 0 - \frac{1}{2}0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Las filas restantes se calculan analogamente.

¿Para qué se utiliza esta tabla?

Teorema 2.1. *Todas las raíces del polinomio*

$$D(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_{n-1} z + a_n$$

tiene parte real menor que cero sí y sólo sí los valores $\alpha_i, i = 1, ..., n$ *son mayores que cero.*

Teorema 2.2 (Criterio de Routh-Hurwitz). *Si* $a_0^{(0)} > 0$*, son equivalentes:*

1. *Todas las raíces del polinomio*

$$D(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_{n-1} z + a_n$$

   tiene parte real menor que cero.

2. *Los valores* $a_0^{(i)}, i = 0, 1, ..., n$ *son mayores que cero.*

3. *Los valores* $a_j^{(i)}, i, j = 0, 1, ..., n$ *son mayores que cero.*

Demostración. *:*

- $(1) \Leftrightarrow (2)$*:*
  Por el teorema anterior, (1) *es equivale a* $\alpha_i > 0, i = 1, ..., n$*, es decir,* $a_0^{(i-2)}/a_0^{(i-1)} > 0$*. Como* $a_0^{(0)} > 0$*, se obtiene directo que* $a_0^{(i)} > 0$ *para* $i = 0, 1, ..., n$*. La reciproca es directa.*

- $(1) \Leftrightarrow (3)$*:*
  Se tiene directo que $(3) \Rightarrow (1)$ *pues* $(3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1)$*. Para la reciproca, supongamos que se cumple* (1)*, luego por el teorema anterior,* $\alpha_i > 0, i = 1, ..., n$*. Recordemos la fórmula para llenar la tabla de Routh:*

$$\begin{aligned} a_i^{(k+2)} &= a_{i+1}^{(k)} - \alpha_{k+1} a_{i+1}^{(k+1)} \\ a_i^{(k+2)} + \alpha_{k+1} a_{i+1}^{(k+1)} &= a_{i+1}^{(k)} \end{aligned}$$

  Evaluando en $i = 0$ *y* $k = n - 2$*:*

$$\underbrace{a_0^{(n)}}_{>0} + \alpha_{n-1} a_1^{(n-1)} = a_1^{(n-2)}$$

  Notemos que siempre las 2 últimas filas, en caso de existir, tienen información en la primera columna, luego, $a_1^{(n-1)} = 0$*, por lo tanto* $a_1^{(n-2)} > 0$*. Repitiendo este procedimiento para todo elemento de la matríz, se concluye el resultado.*$\square$