Control Óptimo

Tarea 2

Profesor: Rafael Correa.
Auxiliares: Jorge Lemus, Oscar Peredo.

Problema 1:

En una reacción química la calidad del producto final depende del valor del pH. Por ello se desea controlar el pH de dicha reacción química variando la cantidad u de uno de los ingredientes. Designemos por $x(t)$ al valor del pH en el instante t. Se supone que:

$$\dot{x}(t) = \alpha x(t) + \beta u.$$

Suponga que $\alpha, \beta > 0$, $x(0) = x_0$ es conocido y la reacción se llva a cabo en el intervalo $[0, T]$, con T conocido. La única forma de vender el producto es que el pH final sea x_T. Además la función de pérdida para el laboratorio está dada por:

$$\int_0^T x^2(t) + u^2(t) dt.$$

Resuelva el problema del laboratorio.

Problema 2

Una firma quiere maximizar sus ganancias mediante un control adecuado de los gastos de propaganda. Consideremos que la firma vende una cantidad $x(t)$ un producto determinado en t. En un mercado competitivo(Cournot) la cantidad vendida corresponden a la fracción de mercado de la empresa. Normalizando el tamaño de mercado a 1, las ventas del mismo producto por la competencia será $1 - x(t)$. La propaganda de la empresa está dirigida a ganar más mercado. Designemos por $u(t)$ a los gastos en publicidad del producto. El modelo para las ventas resultantes como respuesta a la propaganda es:

$$\dot{x} = \alpha(1 - x)u - \beta x.$$

Suponga que $\alpha, \beta > 0$, $x(0) = x_0$ con $0 < x_0 < 1$ es conocido y la propaganda dura por un tiempo T. Al final del T se desea tener una fracción de mercado x_T. La firma desea maximizar:

$$\int_0^T e^{-\rho t}(\gamma x(t) - u(t))dt.$$

Resuelva el problema de la firma.

Problema 3

Suponga que en un país puede invertir su producto (PIB) en capital o bien consumirlo. Denotemos por Y_t al producto del país y K_t al capital en el instante t. La función de producción de la economía está dada por:

$$Y = F(K, L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha},$$

en donde L es la fuerza de trabajo que crece a tasa n. El capital se deprecia a tasa δ. La dinámica del capital está dada por la siguiente ecuación:

$$\dot{K}_t = I_t - \delta K_t,$$

con $I_t = Y_t - C_t$ la inversión en capital en t y C_t el consumo, que será la variable de control.

- Escriba las variables Y, K, I como variables per cápita, dividiendo por L. Llame $x = \frac{X}{L}$.
- Reescriba la dinámica para $\dot{k}$.
- Si el objetivo del gobierno es maximizar

  $$\int_0^\infty e^{-rt} \frac{c(t)^{1-\theta}}{1-\theta} dt$$

  Plantee las ecuaciones de Pontryagin.
- Usando ecuaciones anteriores encuentre un sistema de ecuaciones diferenciales No lineales para las variables c y k.
- Dibuje el digrama de fases, identificando las curvas $\dot{c} = 0$ y $\dot{k} = 0$. Encuentre los puntos de equilibrio del sistema.
- Analice las dinámicas en el diagrama de fases.
- Analice cómo es la convergencia, en caso de haber, hacia el estado de equilibrio.
- Explique que pasará con el punto de equilibrio si se aumenta de manera permante n y como se convergería a este nuevo punto, explicando los cambios en c y k.