Control Óptimo
Clase Auxiliar # 8

Profesor: Rafael Correa
Auxiliar: Jorge Lemus

El problema de control lineal clásico es el siguiente:

$$\begin{aligned} x'(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) && (1) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) && (2) \\ x(t_0) &= x_0 && (3) \end{aligned}$$

Con $x : [t_0, T] \to \mathbb{R}^n$, $u : [t_0, T] \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $A(t), B(t), C(t), D(t)$ matrices **conocidas**. Este punto es relevante, pues en los problemas reales estas matrices, que determinan la dinámica del sistema, suelen ser desconocidas y deben ser estimadas. Sin embargo, para efectos de este curso siempre se suponen conocidas, con lo que conociendo x_0 y $u(t)$, $\forall t \in [t_0, T]$, podemos conocer la variable de estado $x(t)$, $\forall t \in [t_0, T]$.

La ecuación 1 se llama dinámica del sistema. La ecuación 2 se llama ecuación de observación. La utilidad de esta ecuación es que nos da información del sistema cuando no podemos conocer la dinámica del sistema y sólo observamos la respuesta $y(t)$.

Ya se estudiaron en el curso conceptos de Controlabilidad y Obervabilidad para este tipo de sistemas. La Controlabilidad nos da un resulado de existencia. Acá no se ha mencionado aún la noción de **óptimo**. Sólo podemos decir si existe algún control que lleve el sistema de un estado a otro, pero no sabemos si podemos encontrar algún control que lleve el sistema de un estado a otro minimizando algún funcional. La Observabilidad tiene que ver con recuperar la condición inicial x_0 si sólo se observa la respuesta del sistema $y(t)$, $\forall t \in [t_0, T]$. Estas dos nociones de Observavilidad y Controlabilidad parecieran no estar conectadas, pero sí lo están, mediante dualidad.

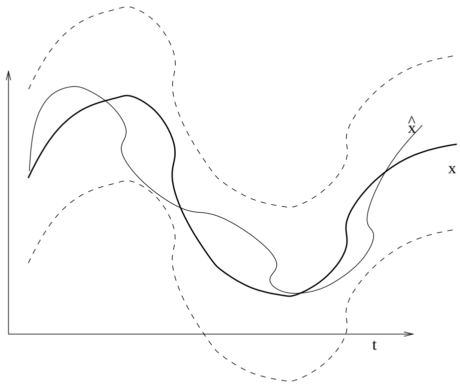
Lo que veremos ahora es la noción de controlabilidad en torno a una trayectoria, lo que es útil pues la mayoría de los sistemas reales son no-lineales.

Consideremos el sistema:

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(x(t), u(t), t) && (4) \\ y(t) &= g(x(t), u(t), t) && (5) \\ x(t_0) &= x_0 && (6) \end{aligned}$$

Definición: Una trayectoria es un trío $(\hat{x}(t), \hat{u}(t), \hat{x}_0)$ que satisface $4, 5$ con $\hat{x}(t_0) = \hat{x}_0$.

La pregunta que nos hacemos ahora no es cómo encontrar trayectorias, lo que nos interesa es saber si el sistema se puede controlar en torno a la trayectoria. Es decir, si es posible mantener el estado $x(t)$ cercano a la trayectoria $\hat{x}(t)$ si se usa un control cercano a $\hat{u}(t)$.



Dada la trayectoria $(\hat{x}(t), \hat{u}(t), \hat{x}_0)$, tomamos un control $u(t) = \hat{u}(t) + u_\delta(t)$, con $||u_\delta||_{L^1} < \delta$, $x_0 = \hat{x}_0 + x_{0\delta}$, con $||x_{0\delta}||_{\mathbb{R}^n} < \delta$.
Suponiendo regularidad en f, tendremos que $x(t) = \hat{x}(t) + x_\delta(t)$, con $||x_\delta(t)||_\infty < \epsilon$.

Ahora, hacemos una aproximación de Taylor de orden 1 en torno a la trayectoria, para cada componente de la función f

$$\begin{aligned} f_i(x(t), u(t), t) &= f_i(\hat{x}(t) + x_\delta(t), \hat{u}(t) + u_\delta(t), t) \\ &= f_i(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t) x_{\delta j}(t) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial u_j}(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t) u_{\delta j}(t) \end{aligned}$$

Es decir, se tiene:

$$f(x(t), u(t), t) = f(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t) + \frac{\partial f}{\partial x} x_\delta + \frac{\partial f}{\partial u} u_\delta$$

Además como $x'(t) = \hat{x}'(t) + x'_\delta(t)$, al reemplazar en el sistema original y usando el hecho de que la trayectoria satisface en particular 4 se obtiene:

$$x'_\delta(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}, \hat{u}) x_\delta + \frac{\partial f}{\partial u}(\hat{x}, \hat{u}) u_\delta,$$

que es un sistema lineal a coeficientes variables. La ecuación de observación también se linealiza de la misma manera.

Con esto, lo que interesa es que el sistema para x_δ sea controlable en torno a cero, con lo que el sistema no lineal original será controlable en torno a la trayectoria $(\hat{x}(t), \hat{u}(t), \hat{x}_0)$.

Ejemplo 1

Estudiar el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \tfrac{-1}{x_2^2}, \\ \dot{x}_2 &= u x_1, \end{aligned}$$

en torno a la trayectoria dada por $\hat{x}_1(0) = \hat{x}_2(0) = 1$, $\hat{u}(t) = 0$, $\forall t$.

Resolviendo el sistema se llega a $\hat{x}_1 = 1 - t, \hat{x}_2 = 1$. La ecuación para x_δ, según lo anterior es:

$$\dot{x}_\delta = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{x_2^3} \\ u & 0 \end{pmatrix} \Big|_{(\hat{x},\hat{u})} x_\delta + \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \end{pmatrix} \Big|_{(\hat{x},\hat{u})} u_\delta,$$

$$\dot{x}_\delta = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x_\delta + \begin{pmatrix} 0 \\ 1-t \end{pmatrix} u_\delta.$$

Para ver si este sistema es controlable, usaremos el criterio de ver si la matriz $W = \int M(t)M^*(t)dt > 0$, con $M(t) = \Phi(t_0, t)B(t)$ ($\Phi(t_0, t)$ matriz fundamental).

En este caso $W = \int (1-s)^2(4s^2+1)ds > 0$, con lo que el sistema para x_δ es controlable.

Si se puede controlar el lineal en torno a cero, entonces el no lineal se puede controlar en torno a la trayectoria. No se puede afirmar nada más. En particular si el lineal no es controlable, no sabemos qué pasa con el no lineal.

Ejemplo 2

Consideremos:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + \operatorname{sen} x_2 + x_1 e^{x_2}, \\ \dot{x}_2 &= x_2^2 + f(u). \end{aligned}$$

Estudiar controlabilidad en torno a $\hat{x} = (0,0)$, $\hat{u} = 0$ en los siguientes casos:

Caso 1: $f(u) = u$

El linealizado en torno a la trayectoria $((0,0),0)$ queda

$$\dot{x}_\delta = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x_\delta + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_\delta.$$

y se tiene que rango$([B \vdots AB]) = 2$, por lo tanto es controlable y el sistema original lo es en torno a la trayectoria dada.

Caso 1: $f(u) = u^2$

El linealizado queda

$$\dot{x}_\delta = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x_\delta + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} u_\delta.$$

y se tiene que rango($[B\vdots AB]$) < 2, por lo tanto es NO controlable. Además el sistema original no es controlable en torno a la trayectoria dada. La intuición detrás de esto es que basta partir con una condición inicial $\epsilon > 0$ para x_2 y nunca podremos llegar a cero en esta componente, pues diverge.

Caso 3: $f(u) = u^3$

El linealizado queda

$$\dot{x}_\delta = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x_\delta + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} u_\delta.$$

y se tiene que rango($[B\vdots AB]$) < 2, por lo tanto NO es controlable en torno a cero. Sin embargo, el sistema original Sí lo es en torno a la trayectoria dada. Basta redefinir el espacio de controles mediante $u = \sqrt[3]{v}$ y tenemos el Caso 1 nuevamente. En este ejemplo vemos que si el Lineal no es controlable en torno a cero, no podemos decir nada de la controlabilidad del No lineal en torno a la trayectoria dada.