MA57C Control Óptimo. Semestre 2007-2
Profesor: Rafael Correa **Auxiliares:** Jorge Lemus, Oscar Peredo.

Clase Auxiliar #5

6 de Septiembre del 2007

1. Reguladores

Tomemos el sistema siguiente

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{1}$$
$$y(t) = Cx(t) + Eu(t) \tag{2}$$

Si suponemos que

$$u(t) = -Kx(t) \tag{3}$$

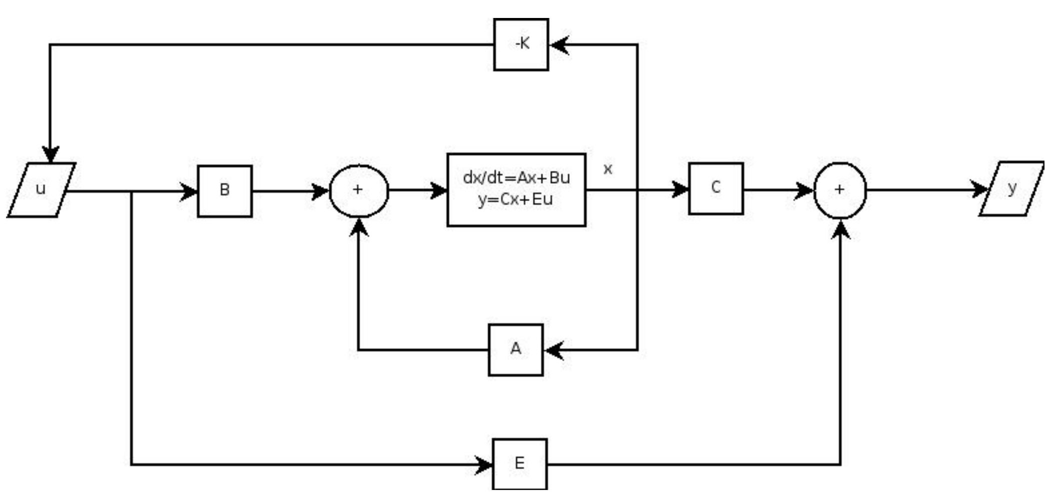
con $r \in \mathbb{R}^p$ un vector de entrada fijo (input) y $K \in \mathbb{R}^{p\times n}$ una matríz real constante (matríz de ganancia), el sistema (1)-(2) queda de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B(-Kx(t)) && (4)\\ &= (A - BK)x(t) && (5)\\ y(t) &= Cx(t) + E(-Kx(t)) && (6)\\ &= (C - EK)x(t) && (7) \end{aligned}$$

Este tipo de controles se denomina **reguladores lineales** y gracias al siguiente teorema permiten estabilizar el sistema (5)-(7) (los valores propios de $A-BK$ tienen parte real negativa), el cual es equivalente al sistema (1)-(2).

Teorema 1.1. *Si el sistema (1)-(2) es controlable, entonces es posible escoger la matríz K de manera de ubicar arbitrariamente los valores propios de la matríz $A - BK$.*

La forma en que se escoge la matríz K involucra cálculos númericos importantes que no se discutirán en esta clase.
El esquema es el siguiente:



2. Estimadores

Consideremos un sistema de la forma:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{8}$$
$$y(t) = Cx(t) \tag{9}$$

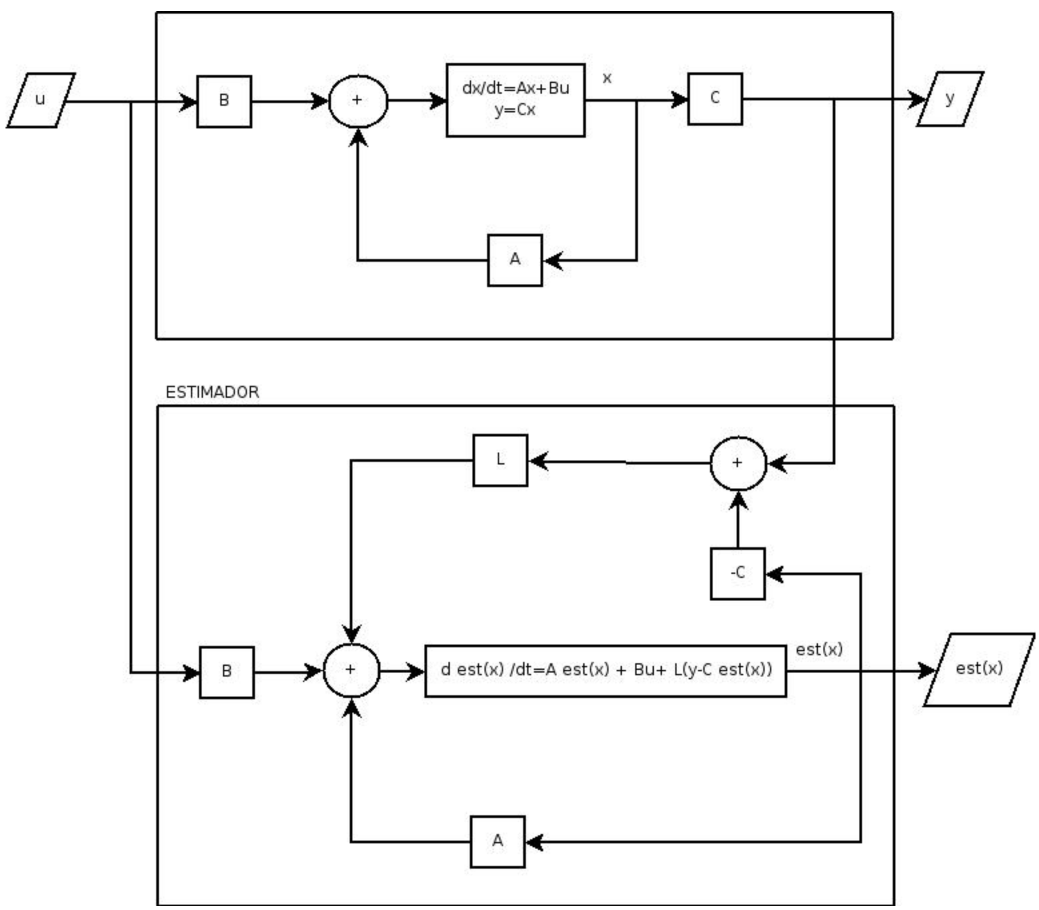
Supongamos que es imposible tener acceso a las variables de estado o sólo podemos obtener observaciones imprecisas. Por ejemplo, si estamos controlando un vehículo a mucha distancia, no podemos saber su posición exacta, sólo obtenemos observaciones de tipo $y = Cx$ usando dispositivos GPS.
Llamemos e al error entre el estado x y su estimador $\hat{x}$, es decir,

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \tag{10}$$

Nuestro objetivo es llevar el error e a cero cuando $t \to \infty$. Para ello, consideremos el siguiente sistema:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C\hat{x}) \tag{11}$$

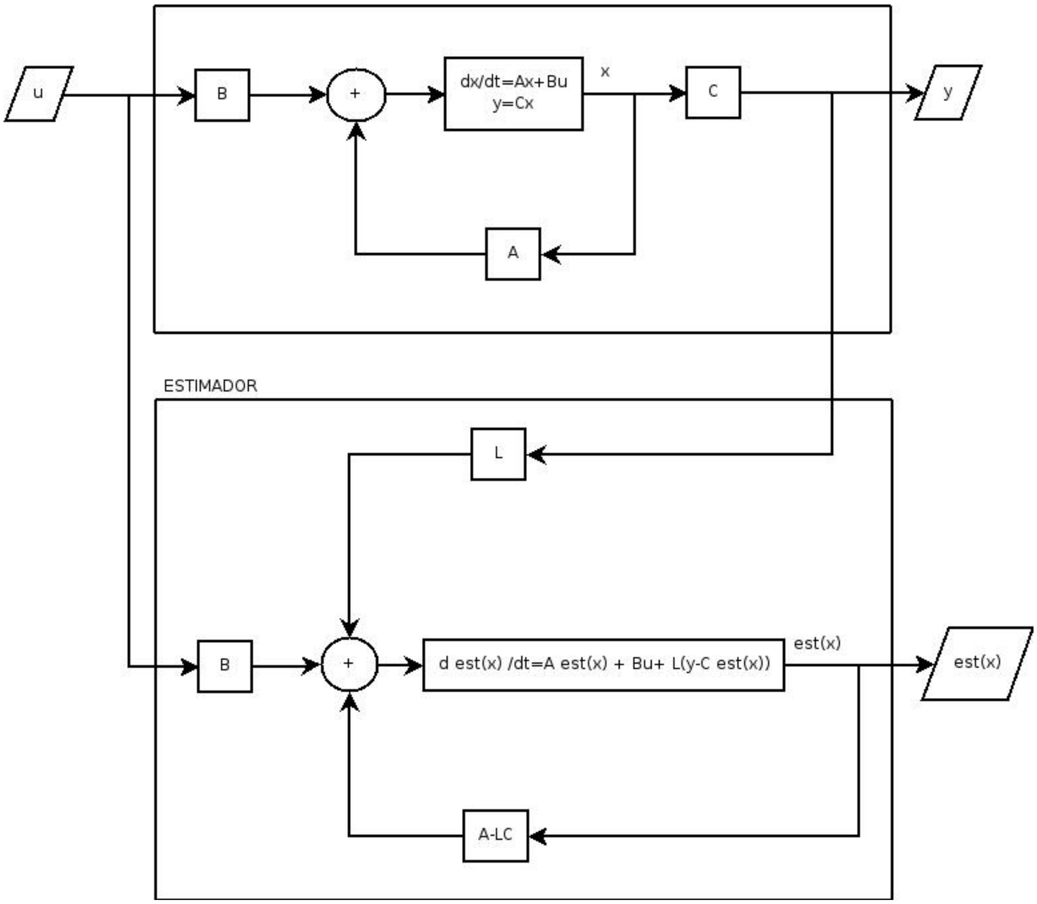
Cuyo diagrama es el siguiente:



La matríz L representa la ganancia de la diferencia entre la observación y la estimación del estado.
¿Porqué se necesita introducir esta matríz?. Veamos los que ocurre...
Esta ecuación se escribe de la forma:

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - LC)\hat{x}(t) + Ly(t) + Bu(t) \tag{12}$$

El nuevo diagrama es el siguiente:



Con esto, podemos simplificar el sistema:

$$
\begin{aligned}
\dot{\hat{x}}(t) &= (A - LC)\hat{x}(t) + Ly(t) + Bu(t) & (13)\\
\dot{\hat{x}}(t) &= (A - LC)\hat{x}(t) + LCx(t) + (\dot{x} - Ax) & (14)\\
\dot{\hat{x}}(t) - \dot{x} &= (A - LC)\hat{x}(t) - (A - LC)x(t) & (15)\\
\dot{e}(t) &= (A - LC)e(t) & (16)
\end{aligned}
$$

Gracias al siguiente teorema, se puede estabilizar el sistema (16), el cuál es equivalente al sistema (12).

Teorema 2.1. *Si el sistema (8)-(9) es observable, entonces es posible escoger la matríz L de manera de ubicar arbitrariamente los valores propios de la matríz $A - LC$. De esta manera el sistema asociado al error, en la ecuación (16) se puede llevar a cero cuando $t \to \infty$.*

3. Conexión entre Estimadores y Reguladores

Consideremos el sistema (8)-(9). Cuando el estado x no esta disponible para realizar el feedback, lo natural es realizarlo usando el estimador del estado, $\hat{x}$, de la misma forma:

$$
u(t) = -K\hat{x}(t) \qquad (17)
$$

Usando este control en el sistema (8)-(9), y el ecuación (16), se tiene:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= Ax(t) - BK\hat{x}(t) & (18)\\
\dot{e}(t) &= (A - LC)e(t) & (19)\\
y(t) &= Cx(t) & (20)
\end{aligned}
$$

Sumando y restando $BKx(t)$ en (18), el sistema queda:

$$\begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}'(t) = \begin{bmatrix} A-BK & BK \\ 0 & A-LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}(t) \tag{21}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}(t) \tag{22}$$

Vimos en la primera sección que si el sistema es (A, B)-controlable, entonces existe una matríz K tal que los valores propios de $A - BK$ se pueden ubicar arbitrarimente. En la segunda sección vimos que si el sistema es (A, C)-observable, entonces existe una matríz L tal que los valores propios de $A - LC$ se pueden ubicar arbitrariamente.
Usando la (A, B)-controlabilidad y (A, C)-observabilidad, el sistema (21)-(22) es asintoticamente estable, obteniendose además, $e(t) \to 0$.

4. Aplicación: *Pole Placement / Root Locus*

Ahora tomemos un sistema definido por la función de transferencia

$$y(s) = G(s)u(s) \tag{23}$$

con $y(s), u(s) \in \mathbb{R}$. Supongamos que el feedback se define de la siguiente manera:

$$u(t) = k(r(t) - y(t)) \tag{24}$$

donde $r(t) \in \mathbb{R}$ es el input del sistema (el feedback se obtiene de la observación y una entrada externa, más la matríz de ganancia k, de una celda). Tomando transformada de Laplace en el feedback y reemplazando en la función de transferencia se tiene:

$$y(s) = G(s)\{k(r(s) - y(s))\} \tag{25}$$

$$y(s) + kG(s)y(s) = kG(s)r(s) \tag{26}$$

$$y(s) = \frac{kG(s)r(s)}{1 + kG(s)} \tag{27}$$

Por lo tanto los polos del sistema satisfacen

$$1 + kG(s) = 0 \tag{28}$$

Si consideramos que $G(s) = \frac{num(s)}{den(s)}$, se forma el sistema:

$$den(s) + knum(s) = 0 \tag{29}$$

$$\frac{den(s)}{k} + num(s) = 0 \tag{30}$$

Dejando el valor de k como parámetro, podemos graficar *curvas* en el plano complejo que indican las posiciones de los polos del sistema, usando un valor de $k > 0$. Si $k \to 0$, se obtienen los polos de $G(s)$. Si $k \to \infty$, se obtienen los ceros de $G(s)$.
La idea de esta aplicación es poder desplazar los polos usando curvas parametrizadas por el valor de la ganancia k.