MA57C Control Óptimo. Semestre 2007-2
Profesor: Rafael Correa **Auxiliares:** Jorge Lemus, Oscar Peredo.

Clase Auxiliar #4

23 de Agosto del 2007

1. Aclaración de la clase anterior

En la clase pasada vimos que la función de transferencia del sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \quad (1)\\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \quad (2)\end{aligned}$$

se definía de la forma

$$\mathbf{G}(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

y el sistema se reducía a la función (en el dominio s de la transformada de Laplace)

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s) \quad (3)$$

Si suponiamos $u(t), y(t) \in \mathbb{R}, \forall t$ y que la función de transferencia se podía escribir de la forma:

$$g(s) = \gamma + \eta \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m_i} \frac{\beta_{i,k}}{(s-\lambda_i)^k}$$

entonces su antitransformada de Laplace se escribía de la forma:

$$\mathcal{L}^{-1}[g](t) = \delta(t-\gamma) + \eta \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m_i} \tilde{\beta}_{i,k} t^{k-1} e^{\lambda_i t} H(t)$$

con λ_i los polos de la función g.
Aplicando antitransformada en (3):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}[\widehat{y}(s)](t) &= \mathcal{L}^{-1}[g(s)\widehat{u}(s)](t)\\ y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[g](t) * u(t)\\ y(t) &= \int_0^t \underbrace{\mathcal{L}^{-1}[g](t-\tau)}_{w(t,\tau)} u(\tau)d\tau\end{aligned}$$

Teorema 1.1. *El sistema (1)-(2), representado por el sistema input-output*

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} w(t,\tau)u(\tau)d\tau$$

es BIBO-estable (Bounded Input, Bounded Output) sí y sólo sí existe un número finito $k \geq 0$ tal que

$$\int_{-\infty}^{t} |w(t,\tau)|d\tau \leq k < \infty, \forall t$$

Demostración. *:*

- $\Longleftarrow$*:*
  Sea u un control (input) acotado, es decir, $|u(t)| \leq k_1, \forall t \in (-\infty, \infty)$. Entonces:

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{t} w(t,\tau)u(\tau)d\tau \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{t} |w(t,\tau)||u(\tau)|d\tau \\ &\leq k_1 \int_{-\infty}^{t} |w(t,\tau)|d\tau \\ &\leq k_1 k \\ &< \infty \end{aligned}$$

- $\Longrightarrow$*:*
  Por contradicción. Supongamos que

$$\int_{-\infty}^{t_1} |w(t,\tau)|d\tau = \infty$$

  para algún t_1 fijo. Definiendo el siguiente control

$$u(t) = signo(w(t_1,t))$$

  se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} y(t_1) &= \int_{-\infty}^{t_1} w(t_1,\tau)u(\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{t_1} |w(t_1,\tau)|d\tau \\ &= \infty \end{aligned}$$

  Es decir, el sistema no es BIBO-estable.$\square$

Con este teorema, sólo hay que probar lo siguiente:

$$\int_{-\infty}^{t} |\mathcal{L}^{-1}[g](t-\tau)|d\tau \leq k < \infty, \forall t$$

o equivalentemente:

$$\int_{-\infty}^{t} \left| \eta \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m_i} \tilde{\beta}_{i,k} (t-\tau)^{k-1} e^{\lambda_i (t-\tau)} H(t-\tau) \right| d\tau \leq k < \infty, \forall t$$

Lo cual se verifica sí y sólo sí $Re(\lambda_i) < 0, \forall i$, es decir, que los valores propios de A tengan parte real estrictamente negativa.

2. Ecuación de Lyapunov y Criterio de Estabilidad

Recordemos el teorema que caracteriza la solución de la ecuación de Lyapunov:

Teorema 2.1. *Si los valores propios de A tienen parte real estrictamente negativa entonces para toda matríz Q existe una única matríz M que satisface la ecuación*

$$A^*M + MA = -Q \tag{4}$$

Además, la matríz M se puede escribir de la forma

$$M = \int_0^\infty e^{A^*t} Q e^{At} dt$$

El siguiente problema se resuelve utilizando las ideas de la demostración del teorema anterior:

Problema 2.1. *Para $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, E \in \mathbb{R}^{m\times n}$, suponga que la ecuación (Ricatti)*

$$PA + A^*P - P^2 + E^*E = 0$$

posee una solución P real, simétrica y positiva. Demuestre que:

(i) La matríz $A - P$ es estable (sus v.p. tiene parte real est. negativa) y $A + P^{-1}E^*E$ es inestable.

(ii) Si A es estable, entonces $P \preceq \int_0^\infty e^{A^*t}E^*Ee^{At}dt$, es decir, $\int_0^\infty e^{A^*t}E^*Ee^{At}dt - P$ es semidefinida positiva.

Solución 2.1. *:*

(i) Sean (λ, x) par propio de $A - P$:

$$\begin{aligned}
PA + A^*P - P^2 + E^*E &= 0 \\
PA + A^*P - P^2 - P^2 + E^*E &= -P^2 \\
P(A-P) + (A-P)^*P &= -P^2 - E^*E \\
< P(A-P)x, x > + < (A-P)^*Px, x > &= < (-P^2 - E^*E)x, x > \\
< (A-P)x, Px > + < Px, (A-P)x > &= -\|Px\|^2 - \|Ex\|^2 \\
\lambda < x, Px > + \overline{\lambda} < Px, x > &= -(\|Px\|^2 + \|Ex\|^2) \\
2Re(\lambda) \underbrace{< x, Px >}_{>0} &= \underbrace{-(\|Px\|^2 + \|Ex\|^2)}_{<0} \\
2Re(\lambda) &= \frac{-(\|Px\|^2 + \|Ex\|^2)}{< x, Px >} \\
&< 0
\end{aligned}$$

Es decir, $A - P$ es estable ($Re(\lambda) < 0$).

Sean (λ, x) *par propio de* $A + P^{-1}E^*E$*:*

$$\begin{array}{rcl} PA + A^*P - P^2 + E^*E & = & 0 \\ PA + A^*P - P^2 + E^*E + E^*E & = & E^*E \\ P(A + P^{-1}E^*E) + (A + P^{-1}E^*E)^*P & = & E^*E \\ < P(A + P^{-1}E^*E)x, x > + < (A + P^{-1}E^*E)^*Px, x > & = & < E^*Ex, x > \\ < (A + P^{-1}E^*E)x, Px > + < Px, (A + P^{-1}E^*E)x > & = & \|Ex\|^2 \\ \lambda < x, Px > + \overline{\lambda} < Px, x > & = & \|Ex\|^2 \\ 2Re(\lambda) < x, Px > & = & \|Ex\|^2 \\ 2Re(\lambda) & = & \dfrac{\|Ex\|^2}{< x, Px >} \\ & \geq & 0 \end{array}$$

Es decir, $A + P^{-1}E^*E$ *es inestable (*$Re(\lambda) \geq 0$*).*

(ii)

$$\begin{array}{rcl} PA + A^*P - P^2 + E^*E & = & 0 \\ e^{A^*t}(PA + A^*P - P^2 + E^*E)e^{At} & = & 0 \\ e^{A^*t}Pe^{At}A + A^*e^{A^*t}Pe^{At} + e^{A^*t}E^*Ee^{A^*t} & = & e^{A^*t}P^2e^{At} \\ \displaystyle\int_0^\infty \left[e^{A^*t}Pe^{At}A + A^*e^{A^*t}Pe^{At}\right] dt + \int_0^\infty e^{A^*t}E^*Ee^{A^*t}dt & = & \displaystyle\int_0^\infty e^{A^*t}P^2e^{At}dt \\ \displaystyle\int_0^\infty \frac{d}{dt}\left[e^{A^*t}Pe^{At}\right] dt + \int_0^\infty e^{A^*t}E^*Ee^{A^*t}dt & = & \displaystyle\int_0^\infty e^{A^*t}P^2e^{At}dt \\ \displaystyle -P + \int_0^\infty e^{A^*t}E^*Ee^{A^*t}dt & = & \displaystyle\int_0^\infty e^{A^*t}P^2e^{At}dt \end{array}$$

Veamos si $\int_0^\infty e^{A^*t}P^2e^{At}dt \succeq 0$*. Sea* $x \neq 0$*:*

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle < \int_0^\infty e^{A^*t}P^2e^{At}dtx, x > & = & \displaystyle\int_0^\infty < e^{A^*t}P^2e^{At}x, x > dt \\ & = & \displaystyle\int_0^\infty < Pe^{At}x, Pe^{At}x > dt \\ & \geq & 0 \end{array}$$

Luego, $\int_0^\infty e^{A^*t}E^*Ee^{At}dt - P \succeq 0.\square$