

MA57C Control Óptimo. Semestre 2007-2

Profesor: Rafael Correa Auxiliar: Oscar Peredo.

Clase Auxiliar #2

9 de Agosto del 2007

1. Resultados previos

Recordemos la definición de controlabilidad para el sistema

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \quad (1)$$

con $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times p}$ para todo t .

Definición 1.1 (Controlabilidad). *El sistema 1 se dice controlable en tiempo t_0 si existe un tiempo finito $t_1 > t_0$ tal que para todo par de estados $x(t_0)$ y x_1 existe un control $u_{[t_0, t_1]}$ que lleva el sistema desde el estado $x(t_0)$ hasta el estado x_1 en tiempo t_1 .*

Del curso de EDO recordemos que:

Lema 1.1. *La solución del sistema 1 se caracteriza de la forma*

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \quad (2)$$

$$= \Phi(t, t_0) \left\{ x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \right\} \quad (3)$$

donde $\Phi(t, t_0) = \Psi(t)\Psi(t_0)^{-1}$, con $\Psi(t)$ matriz fundamental de $\dot{x} = A(t)x$, no-singular para todo t (y recordando $\Phi(a, c) = \Phi(a, b)\Phi(b, c)$).

Probemos un lema técnico:

Lema 1.2. *Sean $f_i, i = 1, \dots, n$ funciones continuas de la forma $f_i : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times p}$. Sea F la matriz de $n \times p$ formada por las funciones f_i como filas. Definiendo*

$$W(t_1, t_2) \triangleq \int_{t_1}^{t_2} F(t)F^*(t)dt$$

se tiene que las filas $f_i, i = 1, \dots, n$ son l.i. en todo el intervalo $[t_1, t_2]$ sí y sólo sí $W(t_1, t_2)$ es no-singular.

Demostración. :

$\Rightarrow$ Por contradicción, supongamos $\{f_i\}$ son l.i. y $W(t_1, t_2)$ es singular. Como $W(t_1, t_2)$ es singular, sus columnas son l.d., es decir, existe $\alpha \in \mathbb{R}^{1 \times n} \setminus \{0\}$ tal que $\alpha W(t_1, t_2) = 0$, lo que implica que $\alpha W(t_1, t_2) \alpha^* = 0$, es decir,

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} (\alpha F(t)) (\alpha F(t))^* dt &= 0 \\ \int_{t_1}^{t_2} \|\alpha F(t)\|^2 dt &= 0 \end{aligned}$$

Como $F(t)$ es continua, se tiene que $\alpha F(t) = 0$, lo que contradice que $\{f_i\}$ son l.i.

$\Leftarrow$ Por contradicción, supongamos $W(t_1, t_2)$ no-singular y $\{f_i\}$ son l.d. en $[t_1, t_2]$. Es decir, existe $\alpha \in \mathbb{R}^{1 \times n} \setminus \{0\}$ tal que $\alpha F(t) = 0$ en $[t_1, t_2]$. Por definición de $W(t_1, t_2)$ se tiene que

$$\begin{aligned} \alpha W(t_1, t_2) &= \int_{t_1}^{t_2} \alpha F(t) F^*(t) dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

luego, las columnas de $W(t_1, t_2)$ son l.d. en $[t_1, t_2]$, lo que contradice la no-singularidad. $\square$

Veamos ahora una caracterización de la controlabilidad:

Teorema 1.1. *El sistema 1 es controlable en tiempo t_0 si y sólo si existe un tiempo finito $t_1 > t_0$ tal que las n filas de la matriz $\Phi(t_0, \cdot) B(\cdot) \in \mathbb{R}^{n \times p}$ son l.i. en el todo el intervalo $[t_0, t_1]$.*

Demostración. :

$\Leftarrow$ Por el lema anterior, si las filas de $\Phi(t_0, \cdot) B(\cdot)$ son l.i. en $[t_0, t_1]$, entonces la matriz Grammiana

$$W(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, \tau) B(\tau) B^*(\tau) \Phi^*(t_0, \tau) d\tau$$

es no-singular. Para $x(t_0) = x_0$ y x_1 cualquiera, se define el control:

$$u(t) = -B^*(t) \Phi^*(t_0, t) W^{-1}(t_0, t_1) [x_0 - \Phi(t_0, t_1) x_1]$$

Probemos que este control lleva el sistema 1 desde el estado x_0 hasta x_1 en tiempo t_1 . En efecto, utilizando la caracterización de la solución de 1 (fórmula 3) y este control, se tiene que:

$$\begin{aligned} x(t_1) &= \Phi(t_1, t_0) \left\{ x_0 + \int_{t_0}^{t_1} -\Phi(t_0, \tau) B(\tau) B^*(\tau) \Phi^*(t_0, \tau) W^{-1}(t_0, t_1) [x_0 - \Phi(t_0, t_1) x_1] d\tau \right\} \\ &= \Phi(t_1, t_0) \{ x_0 - W(t_0, t_1) W(t_0, t_1)^{-1} [x_0 - \Phi(t_0, t_1) x_1] \} \\ &= \Phi(t_1, t_0) \Phi(t_0, t_1) x_1 \\ &= x_1 \end{aligned}$$

Por lo tanto 1 es controlable.

$\implies$ Por contradicción. Supongamos que las columnas de $\Phi(t_0, \cdot)B(\cdot)$ son l.d. en $[t_0, t_1]$. Entonces, existe $\alpha \in \mathbb{R}^{1 \times n} \setminus \{0\}$ tal que $\alpha \Phi(t_0, t)B(t) = 0$ para todo $t \in [t_0, t_1]$. Si se escoge $x_0 = \alpha^*$, la ecuación 3 se transforma en

$$\begin{aligned}\Phi(t_0, t_1)x(t_1) &= \alpha^* + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \\ \alpha \Phi(t_0, t_1)x(t_1) &= \alpha \alpha^* + \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{\alpha \Phi(t_0, \tau)B(\tau)}_{=0} u(\tau)d\tau \\ \alpha \Phi(t_0, t_1)x(t_1) &= \alpha \alpha^*\end{aligned}$$

Por hipótesis, 1 es controlable, luego, para el estado $x(t_1) = 0$, existe un control $u_{[t_0, t_1]}$ tal que $x(t_1) = 0$ partiendo desde $x(t_0) = \alpha^*$. Luego,

$$\alpha \alpha^* = 0$$

Lo cual es una contradicción pues $\alpha \neq 0$. $\square$

2. Control de Energía Mínima

El control que se obtiene en la demostración anterior:

$$u^0(t) = -B^*(t)\Phi^*(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_1)[x_0 - \Phi(t_0, t_1)x_1] \quad (4)$$

posee una propiedad especial, minimiza la *energía* a lo largo del tiempo. Esto se refleja en el siguiente teorema:

Teorema 2.1. Sea u^1 un control que lleva el sistema 1 de (x_0, t_0) a (x_1, t_1) . Entonces

$$\int_{t_0}^{t_1} \|u^1(t)\|^2 dt \geq \int_{t_0}^{t_1} \|u^0(t)\|^2 dt$$

Demostración. De la ecuación 3, se tiene

$$x(t_1) = \Phi(t, t_0) \left\{ x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \right\}$$

Definiendo $\bar{x} \triangleq \Phi^{-1}(t_1, t_0)x(t_1) - x(t_0) = \Phi(t_0, t_1)x(t_1) - x(t_0)$. Luego, como u^1 y u^0 son controles aceptables, se cumple

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, \tau)B(\tau)u^1(\tau)d\tau \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, \tau)B(\tau)u^0(\tau)d\tau\end{aligned}$$

Restando ambos términos de la derecha:

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, \tau) B(\tau) [u^1(\tau) - u^0(\tau)] d\tau &= 0 \\
\left\langle \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, \tau) B(\tau) [u^1(\tau) - u^0(\tau)] d\tau, W^{-1}(t_0, t_1) \bar{x} \right\rangle &= 0 \\
\int_{t_0}^{t_1} \langle \Phi(t_0, \tau) B(\tau) [u^1(\tau) - u^0(\tau)] d\tau, W^{-1}(t_0, t_1) \bar{x} \rangle d\tau &= 0 \\
\int_{t_0}^{t_1} \langle u^1(\tau) - u^0(\tau), (\Phi(t_0, \tau) B(\tau))^* W^{-1}(t_0, t_1) \bar{x} \rangle d\tau &= 0 \\
\int_{t_0}^{t_1} \langle u^1(\tau) - u^0(\tau), B^*(\tau) \Phi^*(t_0, \tau) W^{-1}(t_0, t_1) \bar{x} \rangle d\tau &= 0
\end{aligned}$$

Usando 4, se tiene:

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle u^1(\tau) - u^0(\tau), u^0(\tau) \rangle d\tau = 0$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t_1} \|u^1(t)\|^2 dt &= \int_{t_0}^{t_1} \|u^1(t) - u^0(t) + u^0(t)\|^2 dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \|u^1(t) - u^0(t)\|^2 + \int_{t_0}^{t_1} \|u^0(t)\|^2 dt + 2 \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} \langle u^1(t) - u^0(t), u^0(t) \rangle dt}_{=0} \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \|u^1(t) - u^0(t)\|^2 + \int_{t_0}^{t_1} \|u^0(t)\|^2 dt \\
&\geq \int_{t_0}^{t_1} \|u^0(t)\|^2 dt
\end{aligned}$$

□