

Control 2

Mauricio Duarte & Jaime San Martín

Noviembre 17, 2006

(Pregunta 1) Se probará el teorema de representación previsible para el movimiento Browniano. Esto es, dado $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_1, \mu)$ existe H integrable con respecto al Browniano, en particular $\mathbb{E} \int_0^1 H_s^2 ds < \infty$, tal que

$$Y = \mathbb{E}(Y) + \int_0^1 H_s dB_s.$$

Para ello considere $\mathcal{H} = \{Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_1, \mu) : Y = \mathbb{E}(Y) + \int_0^1 H_s dB_s.\}$ y $\mathcal{E} = \{e^{\int_0^1 h(s) dB_s} : h \in L^2([0, 1], dx)\}$.

(1 punto) Pruebe que $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{H}$

(1 punto) Pruebe que \mathcal{H} es un subespacio cerrado de $L^2(\Omega, \mathcal{F}_1, \mu)$.

(4 puntos) Probaremos que si Y es ortogonal a \mathcal{E} entonces es cero. Supongamos que $\forall h$

$$\mathbb{E}(Y e^{\int_0^1 h(s) dB_s}) = 0.$$

Deduzca que $\forall z_1, \dots, z_n \in \mathbb{R}$ y $\forall 0 \leq t_1 < \dots < t_n \leq 1$

$$\mathbb{E} \left(Y e^{\sum_j z_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})} \right) = 0.$$

La función $F(z_1) = \mathbb{E} \left(Y e^{\sum_j z_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})} \right)$ para z_2, \dots, z_n fijos es analítica y 0 en \mathbb{R} , por lo tanto es 0 en \mathbb{C} (¿ por qué ?).

Se deduce que

$$\mathbb{E} \left(Y e^{i \sum_j z_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})} \right) = 0.$$

Considere la medida con signo en \mathbb{R}^n dada por

$$\mu(A) = \mathbb{E}(Y \mathbf{1}_{\{(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}) \in A\}}).$$

Pruebe que la función característica de μ es 0, esto es

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i \sum_j z_j x_j} \mu(dx) = 0.$$

Concluya que $\mu \equiv 0$. Deduzca que $\mathbb{E}(Y G(B)) = 0$ para toda función G medible acotada, y que entonces $Y = 0$.

Concluya la demostración.

(Pregunta 2) Considere la Ecuación diferencial estocástica

$$dY_t = dB_t - \frac{Y_t}{1-t} dt, \quad 0 \leq t < 1 \quad (1)$$

y condición inicial $Y_0 = 0$.

(2 puntos) Pruebe que $Y_t = B_t - (1-t) \int_0^t \frac{B_u}{(1-u)^2} du$.

(1 punto) Pruebe que la ecuación (1) tiene solución única en todo intervalo del tipo $[0, t_0]$ con $t_0 < 1$, y deduzca que la solución en $[0, 1)$ también es única.

(3 puntos) Calcule $\mathbb{E}(Y_t)$ y $\mathbb{E}(Y_t^2)$. Pruebe que

$$\lim_{t \uparrow 1} Y_t = 0,$$

en L^2 .

Tiempo: 2:30 hrs.