CONTROL I, Cálculo Estocástico.

October 13, 2004

Considere B_t un Movimiento Browniano (M.B.) estandar esto es $B_0 = 0$. Sea

$$Z_t =: B_{1-t} - B_1.$$

- 1 Pruebe que $(Z_t)_{0 \leq t \leq 1}$ es un M.B. estandar.

  ¿ Es Z independiente de B_1 ?.

- Demuestre que

$$\limsup_{t \uparrow 1} \frac{B_t - B_1}{\sqrt{2(1-t)\log|\log(1-t)|}} = 1 \text{ c.s.}$$

Considere $r \in (0,1)$ fijo y defina los procesos

$$Y_t =: B_{r-t} - B_r \quad t \in [0,r],$$

$$X_s =: B_{r+s} - B_r \quad s \geq 0.$$

- Demuestre que Y y X son dos M.B. independientes (definidos en sus respectivos intervalos).

Definimos el proceso del máximo por $M_t =: \max_{0 \leq u \leq t} B_u$.

- Usando las propiedades de escalamiento del M.B. pruebe que $M_t \sim \sqrt{t} M_1$ para $t \in [0,1]$. Recordando que $M_1 \sim |Z|$ con $Z \sim N(0,1)$ deduzca que

$$M_t \sim |N(0,t)|.$$

Definamos ahora $\mathcal{T} =: \inf\{t > 0 : B_t = M_1\}$, el instante donde se alcanza el máximo del M.B. en el intervalo $[0,1]$. Se sabe (no lo pruebe!) que este instante es el único del intervalo donde el M.B. es igual al máximo M_1.

- Pruebe que

$$P_0\{\mathcal{T} < r\} = P_0\left\{\max_{u \in [0,r]} B_u > \max_{u \in [r,1]} B_u\right\} = P_0\left\{\max_{t \in [0,r]} Y_t > \max_{s \in [0,1-r]} X_s\right\}.$$

- Sean $A =: \max_{t\in[0,r]} Y_t$, $C =: \max_{s\in[0,1-r]} X_s$. Demuestre que A y C son independientes y que existen dos variables independientes U, V normales $N(0,1)$ tal que
$$(A, C) \sim (\sqrt{r}|U|, \sqrt{1-r}|V|).$$
Deduzca que
$$P_0\{\mathcal{T} < r\} = P\{\sqrt{r}|U| > \sqrt{1-r}|V|\} = P\left\{\frac{|V|}{\sqrt{U^2+V^2}} < \sqrt{r}\right\}$$
usando coordenadas polares demuestre que
$$P_0\{\mathcal{T} < r\} = \frac{2}{\pi} arcsen(\sqrt{r}).$$

Supongamos que X_i son variables *iid* de media 0 y varianza 1. Definamos $S_0 = 0$ y $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

- Pruebe que $Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{0\leq k\leq n} S_k$ converge en distribución a una variable Z cuya distribución es el valor absoluto de una normal $N(0,1)$.

Ando $\quad B_s$

(1) Sea W un proceso, denotaremos por $T_a^W = \inf\{s \geq 0 \; W_s = a\}$ y $R_a^W = \inf\{s \geq 0, W_s > a\}$. Diremos que (Y) es un movimiento Browniano con ley inicial μ si existe un M.B. (B), $B_0 = 0$, $B \perp Y_0$, $Y_0 \overset{(d)}{=} \mu$ es decir $\mathbb{P}(Y_0 \in A) = \mu(A)$ y $Y_t = B_t + Y_0$.

$\frac{1}{a} B_{a^2 t} = G$

(1) Pruebe que $\forall\, x \leq a \quad \mathbb{P}_x(T_a^B = R_a^B) = 1$

(2) Sea $a \neq 0$ usando que $\frac{1}{a} B_{a^2 t} = W_t$ es un M.B. pruebe que

$\cancel{W(s)=1}$ $\quad B_u$

$$T_a^B \overset{(d)}{=} a^2 T_1^B \text{ en distribución} \qquad \frac{1}{a} B_{a^2 s} = a$$

$\underline{\text{Ind}}$ $\quad T_a^B = a^2 T_1^W = \inf\{s \geq 0 \; W_s = 1\}\{W_s = 1$

(3) Sea $Y_t = B_{t+u}$ (fijo), pruebe que (Y) es un M.B. con ley inicial $N(0, u)$.

Ind. Considere $B_{t+u} - B_u = W_t$

tpo de llegar a 0 de Y

Pruebe que $T_0^Y = T_{-B_u}^W \overset{(d)}{=} (B_u)^2 T_1^W$

donde $T_{-B_u}^W = \left(T_a^W\right)\Big|_{a=-B_u}$

$\underline{\text{Notar que}}$: $\mathbb{E}(F(W, B_u) / B_u = a) = \mathbb{E}(F(W, a))$ si $W \perp B_u$ y $\mathbb{E}(F(W, B_u)) = \int \mathbb{E}(F(W, B_u) / B_u = a) \cdot \mathbb{P}(B_u \in da)$

(4) Defina para cada u, $\theta_u : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, $\omega \to \omega(u+\cdot)$

y $d_u = u + T_0^B \circ \theta_u$

pruebe que $d_u \overset{(d)}{=} u + B_u^2 T_1^W = u\left(1 + \left(\frac{B_u}{\sqrt{u}}\right)^2 T_1^W\right)$

$\overset{(d)}{=} u(1 + Z^2 T_1^W)$ donde $Z \sim N(0,1)$

es independiente de ~~W~~ W

(5) Sea $g_1 = \sup\{t \leq 1 : B_t = 0\}$, pruebe que
deíjlos.

$\{g_1 < u\} \overset{b}{=} \{d_u > 1\}$

Finalmente usando que T_1^B tiene densidad

$$f(s) = \frac{1}{(2\pi s^3)^{1/2}} e^{-1/2s} \qquad s > 0$$

Pruebe que $Z\sqrt{T_1^W} \overset{(d)}{=} C$ donde C tiene distribución Cauchy cuya densidad es

$$h(c) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+c^2} \qquad c \in \mathbb{R}$$

$u = x\sqrt{y}$
$v = y$

$u = Z\sqrt{T_1^W}$

Ind: $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$f_{U,V}(u,v) = f_{XY}\left(F^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) \cdot J_{F^{-1}}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

donde J es el Jacobiano. Concluya que la densidad de g_1 es $\dfrac{1}{\pi\sqrt{u(1-u)}}$

(2) Sean ξ_i iid variables Bernoulli centradas $\mathbb{P}(\xi_i = \pm 1) = 1/2$. Considere $S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$, $S_0 = 0$

Pruebe que

$$\frac{1}{n^{3/2}} \sum_{k=1}^{n} (n-k+1)\, \xi_k \xrightarrow{(d)} \int_0^1 B_s\, ds = Z$$

donde B es un M.B., $B_0 = 0$,
pruebe que $Z \sim N(0, \sigma^2)$ y calcule σ^2.

Indicación: le puede servir usar el siguiente resultado

$$\left.\begin{array}{l} Z_n \xrightarrow{d} Z \\ \varepsilon_n \xrightarrow{C.S} 0 \end{array}\right] \Rightarrow Z_n + \varepsilon_n \xrightarrow{d} Z$$