MA46B ECUACIONES DE LA FÍSICA-MATEMÁTICA

JUAN PEYPOUQUET

PROBLEMARIO 7

En todos los problemas explicita las hipótesis necesarias para u , Ω y L .

Problema 1. En el estudio de la existencia y unicidad de soluciones débiles para la ecuación parabólica usando el método de Galerkin (clases 31 a 33), ¿Qué sucede si tomamos $\mathbf{f} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$?

Problema 2. Sea $\{u_m\}$ la sucesión de soluciones de los problemas aproximados ($\mathcal{P}_m$) dados por el esquema de Galerkin convergen y sea u la solución del problema exacto. Definimos la *energía del sistema* en el instante t como

$$[E(u)](t) := \frac{1}{2} \|u(t)\|^2 + \int_0^t B(u(s), u(s); s) ds.$$

(1) Demuestre la *identidad de conservación de la energía*:

$$[E(u)](t) = \frac{1}{2} \|u_0\|^2 + \int_0^t \langle f(s), u(s) \rangle_H ds \quad \text{para todo } t \in [0, T]$$

(2) Pruebe que la sucesión $\{u_m(t)\}$ converge débilmente a $u(t)$ en H cuando $m \rightarrow \infty$ para cada $t \in [0, T]$.

(3) Defina $X_m(T) = [E(u_m - u)](T)$ y muestre que tiende a cero cuando $m \rightarrow \infty$.

(4) Sean α , β y γ las constantes de las estimaciones *a priori*. Demuestre que si $\gamma = 0$ entonces u_m converge fuertemente a u en $L^2(0, T; V)$.

(5) Deduzca que la convergencia de $u_m(t)$ a $u(t)$ en H también es fuerte para cada $t \in [0, T]$.

(6) Finalmente verifique la continuidad con respecto a las condiciones iniciales. Más precisamente, demuestre que si $(u_0, f), (u_0^*, f^*) \in H \times L^2(0, T; V^*)$ y u, u^* son las correspondientes soluciones entonces

$$\|u - u^*\|_{L^\infty(0, T; H)} \leq \left[\|u_0 - u_0^*\|_H^2 + \frac{1}{\beta} \|f - f^*\|_{L^2(0, T; V^*)}^2 \right]^{1/2}$$

$$\|u - u^*\|_{L^2(0, T; V)} \leq \frac{1}{\sqrt{\beta}} \left[\|u_0 - u_0^*\|_H^2 + \frac{1}{\beta} \|f - f^*\|_{L^2(0, T; V^*)}^2 \right]^{1/2}$$

Problema 3. En el marco de la Proposición 33.2, suponga además que $g \in H^2(\Omega)$ y que $\mathbf{f}' \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$. Pruebe que

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\in L^\infty(0, T; H^2(\Omega)); \\ \mathbf{u}' &\in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega)); \quad y \\ \mathbf{u}'' &\in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)), \end{aligned}$$

con las respectivas normas acotadas por un múltiplo de

$$\|\mathbf{f}\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} + \|g\|_{H^2(\Omega)}.$$

Problema 4. (Principio débil del máximo) Suponga que L es un operador diferencial elíptico de segundo orden sin forma de divergencia, $c \geq 0$ y $u \in \mathcal{C}^2(\Omega_T) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega_T})$. Denotamos $\Gamma_T = \overline{\Omega_T} \setminus \Omega_T$. Demuestre lo siguiente:

- (1) Si $\frac{d}{dt}u + Lu \leq 0$ en Ω_T entonces $\max_{\overline{\Omega_T}} u = \max_{\Gamma_T} u^+$.
- (2) Si además $c \equiv 0$ entonces $\max_{\overline{\Omega_T}} u = \max_{\Gamma_T} u$.
- (3) Enuncie y demuestre resultados similares cuando $\frac{d}{dt}u + Lu \geq 0$ en Ω_T .
- (4) Observe que si $\frac{d}{dt}u + Lu = 0$ entonces $\max_{\overline{\Omega_T}} |u| = \max_{\Gamma_T} |u|$.

Problema 5. Demuestre que la ecuación del calor con condiciones de frontera de tipo Neumann

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u - \Delta u = f & \text{en } \Omega_T \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{en } \partial\Omega \times [0, T] \\ u = g & \text{en } \Omega \times \{0\} \end{cases}$$

tiene, a lo más, una solución suave.

Problema 6. Sea u una solución suave de la ecuación del calor

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u - \Delta u = 0 & \text{en } \Omega \times (0, \infty) \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \times [0, \infty) \\ u = g & \text{en } \Omega \times \{0\}. \end{cases}$$

Sea λ_1 es el primer valor propio del Laplaciano con condiciones de frontera de tipo Dirichlet en Ω . Pruebe que

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} \leq e^{-\lambda_1 t} \|g\|_{L^2(\Omega)}$$

para cada $t \geq 0$.

Problema 7. Pruebe que la ecuación

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}u + a \frac{d}{dt}u - \frac{d^2}{dx^2}u = f & \text{en } (0, 1) \times (0, T) \\ u = 0 & \text{en } \{0, 1\} \times [0, T] \\ u = g, \quad \frac{d}{dt}u = h & \text{en } (0, 1) \times \{0\} \end{cases}$$

(donde a es una constante) tiene, a lo más una solución suave.

Problema 8. Pruebe que la ecuación

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}u + \frac{d^4}{dx^4}u = 0 & \text{en } (0, 1) \times (0, T) \\ u = \frac{d}{dx}u = 0 & \text{en } \{0, 1\} \times [0, T] \\ u = g, \quad \frac{d}{dt}u = h & \text{en } (0, 1) \times \{0\} \end{cases}$$

tiene, a lo más una solución suave.

Problema 9. Sea X un espacio de Banach. Demuestre que un operador lineal A de X en X es el generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo w contractante si, y sólo si,

- (1) $D(A)$ es denso en X ;
- (2) A es cerrado;
- (3) $(w, \infty) \subset \rho(A)$; y
- (4) $\|R_\lambda\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1/(\lambda - w)$ para todo $\lambda > w$.

Problema 10. Sea A el generador infinitesimal de un c_0 -semigrupo de contracciones en X . El dominio del $A^2 = A \circ A$ es

$$D(A^2) = \{ x \in D(A) \mid Ax \in D(A) \}.$$

¿Es denso en X ? Defina similarmente $D(A^k)$ y demuestre que si $x \in D(A^k)$ entonces $S(t)x \in D(A^k)$ para todo $t \geq 0$.

Problema 11. Sea X el espacio de las funciones de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$ que son acotadas y uniformemente continuas, dotado de la norma del supremo. Para $t \geq 0$ y $f \in X$ definimos $[S(t)f](s) = f(t + s)$.

- (1) Pruebe que $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ es un c_0 -semigrupo de contracciones en X ;
- (2) Determine el generador infinitesimal A de S y su dominio;
- (3) ¿Es A acotado?

Problema 12. Sea $E(x, t)$ la solución fundamental de la ecuación del calor (clase 18). Sea $f : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$. Denote $S(0)f = f$ y para $t > 0$ defina

$$[S(t)f](s) = E(\cdot, t) * f.$$

Pruebe que $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ es un semigrupo de contracciones en $L^2(\mathbf{R}^N)$ pero no en $L^\infty(\mathbf{R}^N)$. ¿Es fuertemente continuo?