MA46B Ecuaciones de la Física Matemática. Semestre 2007-2
Profesor: Juan Peypouquet **Auxiliares:** Manuel Larenas, Gustavo Navarro
Fecha de entrega: Control 2

TAREA 3

16 de octubre de 2007

Problema 1. Considere $f \in L^2(\Omega)$.

1. Dé una definición razonable de *solución débil* para el problema de Neumann:

$$\begin{cases} -\Delta u &= f & \text{en} & \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 & \text{sobre} & \partial\Omega. \end{cases}$$

2. Pruebe que el problema tiene solución débil si, y sólo si,

$$\int_\Omega f = 0.$$

3. Pruebe que $\inf\limits_\Omega f \leq u \leq \sup\limits_\Omega f$.
4. Suponga que $f \equiv 0$. Usando métodos de energía pruebe que las únicas soluciónes débiles son las constantes.
5. Responda la misma pregunta del punto anterior usando el principio del máximo.

Problema 2. Sea $u \in H^1(\mathbf{R}^N)$ con soporte compacto y solución débil de la EDP semilineal:

$$-\Delta u + c(u) = f \quad \text{en } \mathbf{R}^N,$$

donde $f \in L^2(\mathbf{R}^N)$ y $c : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es suave, $c(0) = 0$ y $c' \geq 0$. Pruebe que $u \in H^2(\mathbf{R}^N)$.

Problema 3. (Principio *minimax* de Courant) Sea $Lu = -\sum \partial_{x_j}(a_{ij}\partial_{x_i}u)$, con $a_{ij} = a_{ji}$. Denote por $\{\lambda_k\}$ los valores propios de L con condición de frontera homogénea ordenados de manera creciente: $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \ldots$ Pruebe que

$$\lambda_k = \max_{S \in \sum_{k-1}} \min_{u \in S^\perp} \frac{B(u,u)}{\|u\|^2_{L^2(\Omega)}},$$

donde $\sum_j$ es el conjunto de los subespacios vectoriales de $H^1_0(\Omega)$ que tienen dimensión j.

Problema 4.(Principio del máximo para el laplaciano en $H^1(\Omega)$)

Suponga que Ω es acotado. Si $u \in H^1(\Omega)$, decimos que $u \leq 0$ sobre $\partial\Omega$ (la frontera de Ω) si $u^+ \in H_0^1(\Omega)$
Asuma que $C_0(\Omega) \cap H^1(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$.

1. Demuestre que si $u \in C(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$ y si, para todo $x \in \partial\Omega$, $u(x) \leq 0$, entonces $u \leq 0$ sobre $\partial\Omega$ en el sentido definido arriba.

2. Sea $u \in H^1(\Omega)$. Demostrar que, si $\Delta u \geq 0$ (i.e. si Δu es una distribución positiva), entonces para casi todo $x \in \Omega$,
$$u(x) \leq \sup_{\partial\Omega} u$$
donde $\sup_{\partial\Omega} u = \inf\{l \in \mathbf{R} \text{ t.q. } u - l \leq 0 \text{ sobre } \partial\Omega\}$.

   Indicación: sea $l \in \mathbf{R}$ tal que $v = (u-l)^+ \in H_0^1(\Omega)$. Demuestre que $\nabla v = 0$ sobre $\{u - l < 0\}$ y $\nabla v = \nabla u$ sobre $\{u - l > 0\}$, y deduzca que
$$\| \nabla v \|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx \leq 0$$
   Concluya.

3. Sea $u \in H^1(\Omega)$. Demostrar que, si $\Delta u = 0$, entonces para casi todo $x \in \Omega$,
$$\inf_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \sup_{\partial\Omega} u$$
   (donde $\inf_{\partial\Omega} u = -\sup_{\partial\Omega}(-u)$)