MA46B ECUACIONES DE LA FÍSICA-MATEMÁTICA

JUAN PEYPOUQUET

Problemario 6

En todos los problemas explicite las hipótesis necesarias para u, Ω y L.

Problema 1. (Teorema de Stampacchia) Sea a una forma bilineal coerciva sobre un espacio de Hilbert H y sea K un subconjunto convexo cerrado y no vacío de H. Denote por P la proyección ortogonal sobre K. Dado $F \in H^*$, denote por f la representación de F en H que da el Teorema de Riesz.

(1) Compruebe que se puede definir un operador $A : H \to H$ tal que $a(u, v) = \langle Au, v\rangle$.

(2) Demuestre que existe $\rho > 0$ tal que la función $Su = P(\rho f - \rho Au + u)$ es una contracción estricta de K en K.

(3) Concluya que existe un único $u \in K$ tal que

$$a(u, v - u) \geq F(v - u)$$

para todo $v \in K$.

(4) Deduzca el Teorema de Lax-Milgram.

(5) Si a es simétrica, pruebe que la solución de la desigualdad anterior es el único minimizador del funcional

$$v \mapsto \frac{1}{2}a(v, v) - F(v)$$

sobre K.

Problema 2. Sean $f \in L^2(\Omega)$ y $w \in H^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Defina

$$K = \{\ v \in H^1(\Omega) \mid v - w \in H_0^1(\Omega)\ \}.$$

(1) Compruebe que K es convexo, cerrado, no vacío y depende sólo de los valores de w en $\partial\Omega$.

(2) Defina adecuadamente lo que significa ser *solución débil* del problema

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta u + u & = & f & \text{en} \quad \Omega \\ u & = & w & \text{en} \quad \partial\Omega \end{array}\right.$$

(3) Pruebe que existe una única solución débil de este problema y coincide con el único minimizador del funcional

$$v \mapsto \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla v|^2 + v^2\right) - \int_\Omega fv$$

sobre K.

Problema 2. Considere $f \in L^2(\Omega)$.

(1) Dé una definición razonable de *solución débil* para el problema de Neumann:

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \quad \text{en} \quad \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{en} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

(2) Pruebe que el problema tiene solución débil si, y sólo si,

$$\int_\Omega f = 0.$$

(3) Pruebe que $\inf_\Omega f \leq u \leq \sup_\Omega f$.

(4) Suponga que $f \equiv 0$. Usando métodos de energía pruebe que las únicas soluciónes débiles son las constantes.

(5) Responda la misma pregunta del punto anterior usando el principio del máximo.

Problema 3. Sea u una solución *suave* de $Lu = -\sum a_{ij}\partial_{x_i}\partial_{x_j}u = f$ en Ω. Defina $v = |Du|^2 + \lambda u^2$.

(1) Pruebe que $Lv \leq 0$ si λ es suficientemente grande.

(2) Deduzca que

$$\|Du\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\left(\|Du\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + \|u\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\right).$$

Problema 4. Una función $u \in H_0^2(\Omega)$ es solución débil de la *ecuación biarmónica*:

$$\begin{cases} -\Delta^2 u &= f \quad \text{en} \quad \Omega \\ u = \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{en} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

si

$$\int_\Omega \Delta u \Delta v = \int_\Omega f v$$

para toda $v \in H_0^2(\Omega)$. Demuestre que si $f \in L^2(\Omega)$ la ecuación biarmónica tiene una solución débil y es única.

Problema 5. (Principio *minimax* de Courant) Sea $Lu = -\sum \partial_{x_j}(a_{ij}\partial_{x_i}u)$, con $a_{ij} = a_{ji}$. Denote por $\{\lambda_k\}$ los valores propios de L con condición de frontera homogénea ordenados de manera creciente: $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots$ Pruebe que

$$\lambda_k = \max_{S \in \sum_{k-1}} \min_{u \in S^\perp} \frac{B(u,u)}{\|u\|^2_{L^2(\Omega)}},$$

donde $\sum_j$ es el conjunto de los subespacios vectoriales de $H_0^1(\Omega)$ que tienen dimensión j.