

MA46B ECUACIONES DE LA FÍSICA-MATEMÁTICA

JUAN PEYPOUQUET

PROBLEMARIO 5

Problema 1. Sea $\Omega = B(0, 1)$. Para $\alpha > 0$ considere la función

$$u(x) = \begin{cases} |x|^{-\alpha} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- (1) Encuentre las relaciones que deben cumplir α , N , p y m para que u esté en $W^{m,p}(\Omega)$.
- (2) Use lo anterior para construir una función $v \in W^{1,p}$ que no esté acotada en ningún subconjunto abierto de Ω .

Problema 2. Encuentre una función $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ que no sea Lipschitz-continua. Sugerencia: considere $\Omega = B(0, 1) \setminus (-1, 0]$ en $\mathbf{R}^2$.

Problema 3. Pruebe que si $s > N/2$ el producto de funciones en $H^s(\mathbf{R}^N)$ está en $H^s(\mathbf{R}^N)$. Compruebe también que si $s > m + N/2$ entonces las funciones en $H^s(\mathbf{R}^N)$ son de clase $\mathcal{C}^m$ (representante).

Problema 4. Demuestre que si $s > N/2$ entonces las funciones en $H^s(\mathbf{R}^N)$ son acotadas, con $\|u\|_\infty \leq C\|u\|_{H^s(\mathbf{R}^N)}$.

Problema 5. Sea Ω un abierto acotado. Decimos que $u \in H^s_{\text{loc}}(\Omega)$ si $\phi u \in H^s(\mathbf{R}^N)$ para toda $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Pruebe que si $s > N/2$ entonces toda $u \in H^s_{\text{loc}}(\Omega)$ es continua.

Problema 6. Complete los detalles que faltan en la demostración del Teorema 22.1.

Problema 7. Pruebe que el operador traza, definido en el Teorema 22.2 es sobreyectivo.

Problema 8. Sean Ω_1 y Ω_2 abiertos acotados de $\mathbf{R}^N$. Suponga que Ω_1 tiene frontera $\mathcal{C}^1$ y que $\Omega_1 \subset\subset \Omega_2$. Pruebe que existe un operador lineal continuo $E : W^{1,p}(\Omega_1) \rightarrow W^{1,p}(\mathbf{R}^N)$ tal que para cada $u \in W^{1,p}(\Omega_1)$, se tiene que $Eu = u$ en casi todo punto de Ω_1 y el soporte de Eu está contenido en Ω_2 (ver material adicional “Operador de extensión” en U-cursos).

Problema 9. Demuestre el Corolario 23.2.

Problema 10. Pruebe que $W^{1,N}(\mathbf{R}^N)$ se inyecta de manera continua en $L^q(\mathbf{R}^N)$ para todo $q \geq N$. Para ello, use las ideas de la demostración de la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev (Teorema 23.1), la desigualdad de Young y la desigualdad de interpolación para probar que $\|u\|_{L^{Nk/(N-1)}} \leq C\|u\|_{W^{1,N}}$ con $k = N, N+1, \dots$

Problema 11. Verifique mediante un contraejemplo que la inclusión del problema anterior no es cierta para $q = \infty$.

Problema 12. Suponga que $p > N$.

- (1) Pruebe que existe una constante C tal que

$$\frac{1}{\text{vol}(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |u(x) - u(y)| \, dy \leq C \int_{B(x,r)} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{N-1}} \, dy$$

para toda $u \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^N)$. Use coordenadas esféricas.

- (2) Usando lo anterior pruebe que

$$\|u\|_{\infty} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbf{R}^N)}$$

para toda $u \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^N)$. Le será útil la desigualdad de Hölder.

- (3) Defina $r = |x - y|$ y $W = B(x, r) \cap B(y, r)$. Pruebe que

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &\leq \frac{1}{\text{vol}(W)} \int_W |u(x) - u(z)| \, dz + \frac{1}{\text{vol}(W)} \int_W |u(y) - u(z)| \, dz \\ &\leq C|x-y|^{\gamma} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbf{R}^N)}, \end{aligned}$$

donde $\gamma = 1 - N/p$.

- (4) Deduzca el **Teorema de Morrey**: $W^{1,p}(\mathbf{R}^N)$ se inyecta de manera continua en $L^{\infty}(\mathbf{R}^N)$. Más aun, toda función $u \in W^{1,p}(\mathbf{R}^N)$ satisface

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x-y|^{\gamma} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbf{R}^N)},$$

con $\gamma = 1 - N/p$. En particular, los elementos de $W^{1,p}(\mathbf{R}^N)$ son funciones Hölder-continuas. Observe también que la convergencia en $W^{1,p}(\mathbf{R}^N)$ implica convergencia uniforme.

- (5) Pruebe que si $u \in W^{1,p}(\mathbf{R}^N)$, entonces $\lim_{|y| \rightarrow \infty} u(y) = 0$.

Problema 13. Verifique que la desigualdad de Poincaré también es válida para $p \geq N$.