Problemario 4

Problema 1: Denote por $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R}^N) = \{T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N) \mid \inf[\mathrm{sop}(T)] > -\infty\}$. Defina la convolución de dos elementos de $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R}^N)$ y demuestre que satisface las propiedades dadas en el Teorema 13.3. Determine la convolución de la distribución T_H con ella misma n veces.

Problema 2: Determine la convolución de $\chi_{[-1,1]}$ con $\chi_{[-k,k]}$, para $k \in \mathbb{N}$.

Problema 3: Sea $T = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k$. Calcule la convolución entre T y $\chi_{[-1,1]}$ (verifique las definiciones y enuncie adecuadamente).

Problema 4: Determine la convolución entre las distribuciones asociadas a las funciones:

(1) $H(x)$ y $g(x) = xH(x+1)$.
(2) $f(x) = \mathrm{sen}(x)H(x)$ y $H(x-\pi)$.
(3) $H(x)$ y $g(x) = (1-|x-1|)\chi_{[0,2]}$.
(4) $f(x) = (1-|x-a|)\chi_{[a-1,a+1]}$ y $g(x) = (1-|x-b|)\chi_{[b-1,b+1]}$.

Problema 5: Pruebe que si $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ entonces la función $S \mapsto T * S$ es continua de $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ en $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$. Verifique también que la función $(T,S) \mapsto T * S$ <u>no</u> lo es.

Problema 6: En este ejercicio, utilice la "heurística" descrita en la clase 14.

(1) Determine la solución fundamental del operador $(\delta_0' - z\delta_0)^m$, es decir, la solución de la ecuación $(\delta_0' - z\delta_0)^m * E = \delta$.
(2) Considere un polinomio en $\mathbb{R}^2$: $P(\xi,\zeta) = \sum_{\alpha+\beta\leq n} c_{\alpha,\beta}\xi^\alpha\zeta^\beta$. Determine la solución fundamental del operador $P(\delta_0', \delta_0)$.