

MA-3111—Tercer Parcial —

1. Dé las definiciones de los siguientes conceptos.

- a) (2 pts) El espacio de Schwartz $C_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R})$.
- b) (2 pts) Una distribución atemperada.
- c) (2 pts) La transformada de Fourier de una distribución atemperada.
A la luz de esto, explique la fórmula
- d) (3 pts)

$$2\pi\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\omega} d\omega,$$

conectándola con el teorema de Plancherel para las transformadas de Fourier directa e inversa.

2. En el semieje positivo $0 < x < \infty$ se define

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 < x < 1; \\ 2 - x, & \text{si } 1 < x < 2; \\ 0, & \text{si } 2 < x < \infty \end{cases}.$$

- a) (5 pts) Hallar $g(\omega)$ en $0 < \omega < \infty$ tal que

$$f(x) = \int_0^{\infty} \sin x\omega g(\omega) d\omega.$$

- b) (7 pts) Hallar $u(x, t)$ definida en $0 \leq x < \infty$, $0 < t < \infty$ que cumpla con la ecuación de calor $u_t = u_{xx}$ y las condiciones de contorno $u(0, t) = 0$, $u(x, 0) = f(x)$.

3. Sea $g(x)$ la función dada por

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\infty < x < -1; \\ x + x^2 & \text{si } -1 < x < 0; \\ x - x^2 & \text{si } 0 < x < 1; \\ 0 & \text{si } 1 < x < \infty. \end{cases}$$

Usando derivadas generalizadas, calcule su transformada de Fourier.

4. Consideremos $w(x, y, t) = J_0(\sqrt{x^2 + y^2})T(t)$ donde $J_0(r)$ es la función de Bessel de orden cero. Para cada problema determine la función $T(t)$ que sirva:

- a) (3 pts) $w_t = a(w_{xx} + w_{yy})$, $w(0, 0, 0) = b$, con $a > 0$ y $b > 0$.
- b) (4 pts) $w_{tt} + w_{xx} + w_{yy} = -5w$, $w(x, y, 0) = 0$, $w_t(x, y, 0) \neq 0$.
- c) (3 pts) $w_{tt} = w_{xx} + w_{yy}$, $w(x, y, 0) \neq 0$, $w_t(x, y, 0) = 0$.