

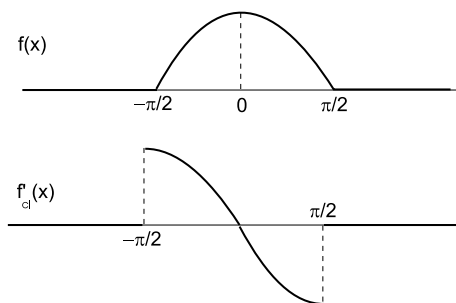
1. **Problema:** (xcxcxcx)

Solución:

1 Problemas resueltos sobre Funciones Generalizadas

1. **Problema:** (M7GEN01) Considere la función $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si } |x| \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$. Calcule $f''_{gen}(x)$.

Solución:

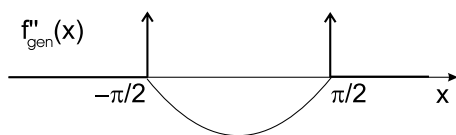


Como f es continua

$$f'_{gen} = f'_{cl} \text{ y } f'_{cl}(x) = \begin{cases} -\sin x & \text{si } |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si } |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Como $f''_{gen}(x) = f'_{cl}(x) + \sum_i S f'_{gen}(c_i) \delta(x - c_i)$, donde los c_i son los puntos de discontinuidad de f'_{gen} , se tiene:

$$\begin{aligned} f''_{gen}(x) &= \begin{cases} -\cos x & \text{si } |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si } |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases} \\ &\quad + S f'_{gen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \delta\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + S f'_{gen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \delta\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \begin{cases} -\cos x & \text{si } |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si } |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases} \\ &\quad + (1 - 0) \delta\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + (0 - (-1)) \delta\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \begin{cases} -\cos x & \text{si } |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si } |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases} \\ &\quad + \delta\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \delta\left(x - \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$



2. **Problema:** (M7GEN02) Muestre que $(x^2 + 1)\delta'(x) = \delta'(x)$, en el espacio de prueba $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

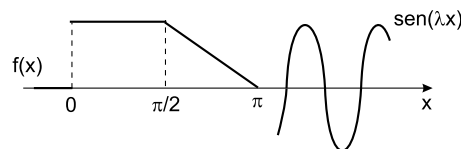
Solución: Sea $\phi(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Entonces:

$$\begin{aligned} \langle (x^2 + 1)\delta'(x) | \phi \rangle &= \langle \delta'(x) | (x^2 + 1)\phi(x) \rangle \\ &= -\langle \delta(x) | [(x^2 + 1)\phi(x)]' \rangle \\ &= -\langle \delta(x) | 2x\phi(x) + (x^2 + 1)\phi'(x) \rangle \\ &= -2 \cdot 0 \cdot \phi(0) - (0^2 + 1)\phi'(0) = -\phi'(0) \\ &= -\langle \delta(x) | \phi'(x) \rangle = \langle \delta'(x) | \phi(x) \rangle \end{aligned}$$

por tanto, $(x^2 + 1)\delta'(x) = \delta'(x)$, como queriamos demostrar.

3. **Problema:** (M7GEN03) Sea f

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < \pi/2 \\ 2/\pi(\pi - x) & \text{si } \pi/2 \leq x \leq \pi \\ 0 & \text{si } x < 0 \text{ o } x > \pi \end{cases}.$$



Calcular:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(\lambda x) dx.$$

Aquí $\phi(x) = \sin(\lambda x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, que no tiene soporte compacto, por tanto la integral existirá si f es de soporte compacto.

Solución: Observemos que $\varphi = -\frac{\phi''}{\lambda^2}$.

$$\begin{aligned} I &= \langle f | \phi \rangle = \langle f | -\frac{1}{\lambda^2} \phi'' \rangle = -\frac{1}{\lambda^2} \langle f''_{gen} | \phi \rangle \\ &= -\frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} f''_{gen}(x) \phi(x) dx. \end{aligned}$$

Basta entonces calcular f''_{gen} (ver figura en pag 6):

$$f'_{gen}(x) = \begin{cases} -2/\pi & \text{si } \pi/2 < x < \pi \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} + 1 \cdot \delta(x),$$

$$f''_{gen}(x) = -\frac{2}{\pi} \delta\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{\pi} \delta(x - \pi) + \delta'(x).$$

Luego

$$\begin{aligned}
 \langle f''_{gen}(x) | \phi(x) \rangle &= \left\langle -\frac{2}{\pi} \delta \left(x - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{2}{\pi} \delta(x-\pi) + \delta'(x) \middle| \phi(x) \right\rangle \\
 &= -\frac{2}{\pi} \left\langle \delta \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \middle| \phi(x) \right\rangle + \frac{2}{\pi} \langle \delta(x-\pi) | \phi(x) \rangle + \langle \delta'(x) | \phi(x) \rangle \\
 &= -\frac{2}{\pi} \phi \left(\frac{\pi}{2} \right) + \frac{2}{\pi} \phi(\pi) - \phi'(0) \\
 &= -\frac{2}{\pi} \sin \left(\lambda \frac{\pi}{2} \right) + \frac{2}{\pi} \sin(\lambda\pi) - \lambda \cos(\lambda \cdot 0) \\
 \Rightarrow I &= -\frac{1}{\lambda^2} \left[-\frac{2}{\pi} \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) + \frac{2}{\pi} \sin(\lambda\pi) - \lambda \right].
 \end{aligned}$$

Observación:

Si $f(x)$ estuviese definida únicamente en $[0, \pi]$, simplemente hacemos todos los cálculos anteriores con una nueva función $h(x)$ definida por:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [0, \pi] \\ 0 & \text{si } x \notin [0, \pi] \end{cases}$$

4. **Problema:** (M7GEN04) Dado $0 < a < \pi$, existe una función continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) \equiv 0$ para $-\infty < x < 0$ y $\left(\frac{d}{dx}\right)^2_{gen} f(x) = (\pi-a)\delta(x) - \pi\delta(x-a) + a\delta(x-\pi)$. Graficar $f(x)$ sobre toda la recta real.

Solución: Como $\frac{d}{dx} H(x) = \delta(x)$, siendo $H(x)$ la función de Heaviside, tenemos:

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^2_{gen} f(x) = (\pi-a)H(x) - \pi H(x-a) + aH(x-\pi) + c_1$$

De aquí:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (\pi-a)xH(x) - \pi(x-a)H(x-a) \\
 &\quad + a(x-\pi)H(x-\pi) + c_1x + c_2
 \end{aligned}$$

Puesto que la función rampa $R(x) = H(x)$ cumple $R''_{gen} = \delta(x)$ y más generalmente $R''_{gen}(x-c) = \delta(x-c)$.

Como $f(x) \equiv 0$ si $x < 0$ es necesario que $c_1x + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$. La función a graficar queda:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (\pi-a)xH(x) - \pi(x-a)H(x-a) \\
 &\quad + a(x-\pi)H(x-\pi).
 \end{aligned}$$

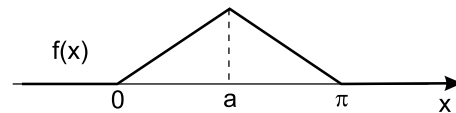
Observamos tres puntos de referencia dados por la función de Heaviside: $x_1 = 0$, $x_2 = a$, $x_3 = \pi$ donde $f(x)$ toma los valores:

$$f(0) = 0, f(a) = a(\pi-a), f(\pi) = (\pi-a)\pi - \pi(\pi-a) = 0.$$

Consideremos ahora $f(x)$ en los otros casos:

$$\begin{aligned}
 x < 0 : f(x) &= 0, \quad 0 < x < a : f(x) = (\pi-a)x \\
 a < x < \pi : f(x) &= (\pi-a)x - \pi(x-a) = -ax + a\pi \\
 x > \pi : f(x) &= (\pi-a)x - \pi(x-a) + a(x-\pi) = 0
 \end{aligned}$$

Finalmente:



5. Problema: (M7GEN05)

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave a trozos que satisface $f(x) = 0$ si $|x| > 2$ y $f''_{gen}(x) = \delta(x+2) - \delta(x+1) - \delta(x-1) + \delta(x-2)$.

- (a) Grafique $f(x)$ sobre toda la recta real.
(b) Explique por qué existe la integral impropia:

$$I(m) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(mx) dx.$$

- (c) Calcule $I(m)$ usando $f''_{gen}(x)$.

Solución:

- (a) Dado que $H'_{gen}(x)$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d}{dx}\right)^2_{gen} f(x) &= H(x+2) - H(x+1) \\
 &\quad - H(x-1) + H(x-2) + c_1
 \end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (x+2)H(x+2) - (x+1)H(x+1) \\
 &\quad - (x-1)H(x-1) + (x-2)H(x-2)
 \end{aligned}$$

pues $f(x) \equiv 0$ si $|x| > 2$. Cuando $x > 2$, $f(x) = (x+2) - (x+1) - (x-1) + (x-2) + c_1x + c_2 = 0$; luego $c_1 = c_2 = 0$.

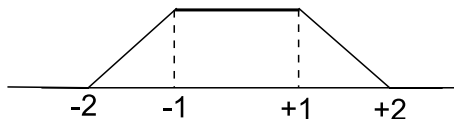
Evaluamos f en los puntos de referencia dados por la función de Heaviside:

$$f(-2) = 0, f(-1) = 1, f(1) = 1, f(2) = 0$$

y para:

$$\begin{aligned} -2 < x < -1 : f(x) &= x + 2 \\ -1 < x < 1 : f(x) &= x + 2 - (x + 1) = 1 \\ 1 < x < 2 : f(x) &= x + 2 - (x + 1) - (x - 1) \\ &= 2 - x. \end{aligned}$$

De donde resulta:



- (b) Aplicamos el criterio de convergencia para integrales impropias: si $|h(x)| \leq g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ y $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx$ existe, entonces $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dx$ existe, o aún más breve: porque $f(x)$ tiene soporte compacto.

Tome $h(x) = f(x) \cos(mx)$ así: $|h(x)| \leq f(x)$ y $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-2}^{-1} (x+2) dx + \int_{-1}^1 1 dx + \int_1^2 (2-x) dx < \infty$, por lo tanto $I(m)$ converge.

(c)

$$\begin{aligned} I(m) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(mx) dx \\ &= -\frac{1}{m^2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{d^2}{dx^2} \cos(mx) dx \end{aligned}$$

y por la fórmula de integración por partes

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{m^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{d}{dx} \right)_{gen}^2 f(x) \right] \cos(mx) dx \\ &= -\frac{1}{m^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\delta(x+2) - \delta(x+1) - \delta(x-1) + \delta(x-2)) \cos(mx) dx \\ &= -\frac{1}{m^2} (\cos(-2m) - \cos(-m) - \cos(m) + \cos(2m)) \\ &= -\frac{1}{m^2} (2 \cos 2m - 2 \cos m) \\ &= -\frac{2}{m^2} (\cos 2m - \cos m). \end{aligned}$$

6. **Problema:** (M7GEN06) Demuestre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} \left(\delta \left(x + \frac{1}{n} \right) - \delta \left(x - \frac{1}{n} \right) \right) = \delta'(x).$$

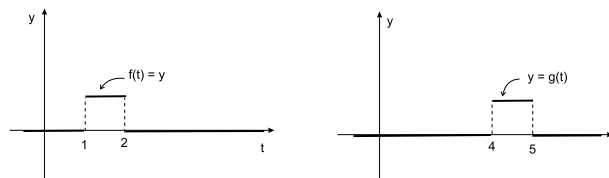
Solución: Debemos ver que $\forall \phi \in \mathcal{C}^\infty$ función de prueba

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle \frac{n}{2} \left[\delta \left(x + \frac{1}{n} \right) - \delta \left(x - \frac{1}{n} \right) \right] \middle| \phi \right\rangle \\ = \langle \delta'(x) | \phi \rangle = -\phi'(0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle \frac{n}{2} \left[\delta \left(x + \frac{1}{n} \right) - \delta \left(x - \frac{1}{n} \right) \right] \middle| \phi \right\rangle \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} \left[\phi \left(\frac{1}{n} \right) - \phi \left(-\frac{1}{n} \right) \right] \\ = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi(-1/n) - \phi(1/n)}{1/n} = \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(-h) - \phi(h)}{h} \\ = \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(-h) - \phi(0) + \phi(0) - \phi(h)}{h} \\ = \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{\phi(h) - \phi(0)}{h} - \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(-h) - \phi(0)}{h} \\ = \frac{1}{2} (-\phi'(0) - \phi'(0)) = -\phi'(0) \quad \bullet \end{aligned}$$

2 Problemas resueltos sobre Convolución

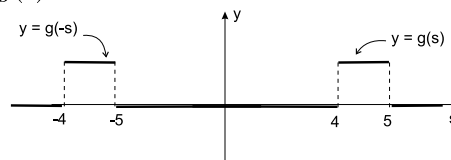
1. **Problema:** (M7CONV01) (Solución Gráfica)
Hallar $f * g$ en forma gráfica siendo f y g como en la figura:



Solución: El procedimiento gráfico para hallar $f * g$ puede describirse así:

- (a) La gráfica de $f(t)$ se mantiene igual, sólo que ahora la llamamos $f(s)$.
(b) Para hallar la representación de $g(s-t)$ procedemos de la siguiente forma:

- i. Hallamos $g(-s)$: imagen especular de $g(s)$



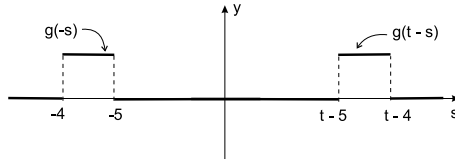
- ii. Para hallar $g(t-s)$ observamos que $g(t-s) = g(-(s-t))$, i.e, es la imagen de $g(-s)$ desplazada hacia la derecha en t unidades. La modalidad de este desplazamiento dependerá de las funciones involucradas. En nuestro caso:

$$f(t) = H(t-1) - H(t-2),$$

$$g(t) = H(t-4) - H(t-5)$$

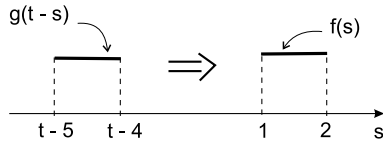
Como $(f * g)(t) = H(t - (a + b))X(t)$ para alguna función $X \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, sólo nos interesan los valores $t > 1 + 4 = 5$

- iii. Identifiquemos los extremos de $g(t-s)$

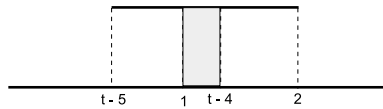


Como la función $g(t-s)$ existirá si $t-s > 0$ y como $t > 5$ y además $g(-s)$ está definida entre -5 y -4 , entonces $g(t-s)$ estará definida entre $t-5$ y $t-4$.

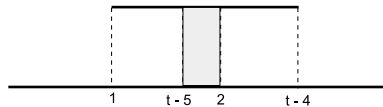
- iv. Para $t > 5$, la gráfica de $t-s$ se va acercando a la gráfica de $f(s)$:



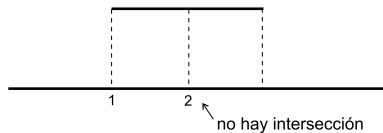
hasta que comienza la intersección:



En el intervalo $5 < t < 6$: $(f * g)(t) = \int_1^{t-4} 1 \cdot 1 ds = t - 5$. En el intervalo $6 < t < 7$:



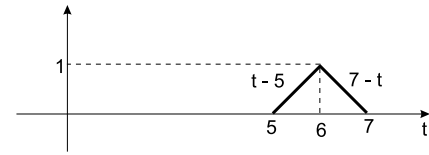
$(f * g)(t) = \int_{t-5}^2 1 \cdot 1 ds = 7 - t$. Para $t > 7$ $(f * g)(t) = 0$



Finalmente:

$$(f * g)(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 5 \\ t - 5 & \text{si } 5 < t < 6 \\ 7 - t & \text{si } 6 < t < 7 \\ 0 & \text{si } t > 7 \end{cases}$$

cuya gráfica es



2. **Problema:** (M7CONV02) (Solución Analítica) Halle y grafique $f * g$ si $f(t) = H(t-1)$ y $g(t) = e^{-t}H(t)$.

Solución: Sabemos que

$$\begin{aligned} f * g &= H(t - (a + b)) \int_a^{t-b} f(s)g(t-s)ds \\ &= H(t - (a + b)) \int_b^{t-a} g(s)f(t-s)ds. \end{aligned}$$

Aquí $a = 1$, $b = 0$ y $f * g$ existe para $t > 1$, i.e, $0 < s < t-1$

Usando la segunda versión de $f * g$, tenemos:

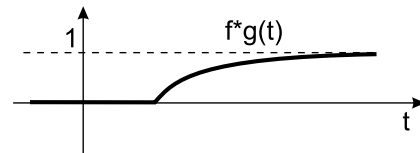
$$\begin{aligned} (f * g)(t) &= H(t-1) \int_0^{t-1} e^{-s}H(s)H(t-1-s)ds \\ &= H(t-1) \int_0^{t-1} e^{-s}H(t-(1+s))ds, \end{aligned}$$

pero

$$H(t-(1+s)) = \begin{cases} 1 & \text{si } s < t-1 \\ 0 & \text{si } s > t-1 \end{cases}$$

entonces

$$\begin{aligned} (f * g)(t) &= H(t-1) [-e^{-s}] \Big|_0^{t-1} \\ &= H(t-1)[1 - e^{1-t}] = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ 1 - e^{1-t} & \text{si } t > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

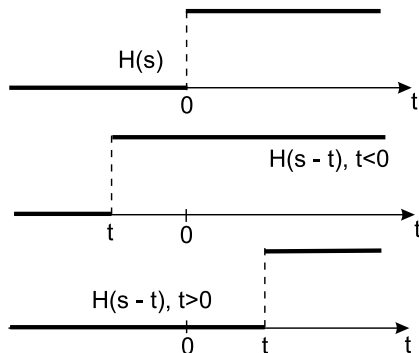


3. **Problema:** (M7CONV03) Pruebe que $H(t) * H(-t)$ no existe.

Solución: Sea $f(t) = H(t)$ y $g(t) = H(-t)$.

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(t-s)ds = \int_{-\infty}^{+\infty} H(s)H(t-s)ds$$

Veamos los gráficos de f y g :



así, si $t < 0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(s)H(t-s)ds = \int_0^{+\infty} ds \rightarrow \infty$$

así, si $t > 0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(s)H(t-s)ds = \int_t^{+\infty} ds \rightarrow \infty$$

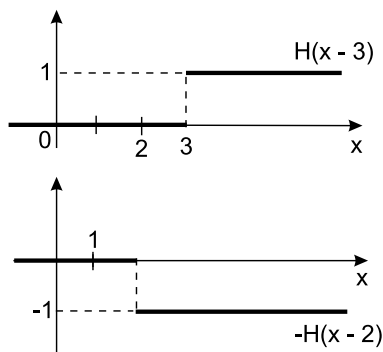
$\therefore \nexists H(t) * H(-t)$.

4. **Problema:** (M7CONV04) Sean $f(x) = H(x-3) - H(x-2)$ y $g(x) = H(x) - H(x+1)$:

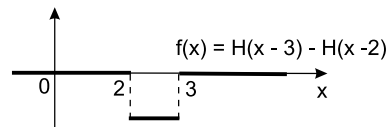
- Gráfique f y g .
- Explique por qué $(f * g)(x) = 0$ fuera del intervalo $1 < x < 3$.
- Calcule $(f * g)(x)$ para $1 < x < 3$.

Solución:

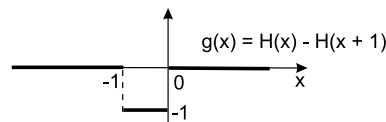
- Veamos primero la gráfica de f :



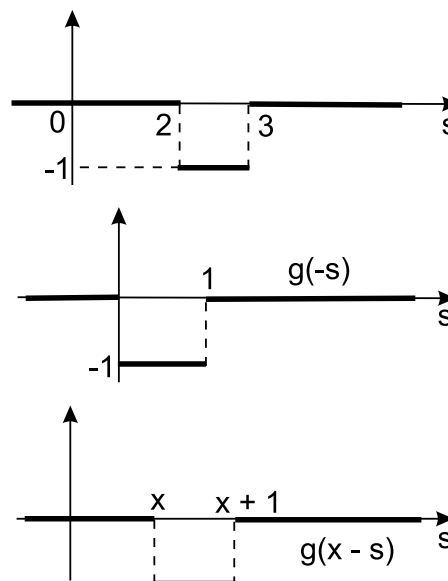
Así, de acuerdo con estos dos gráficos, obtenemos:



Similarmente procedemos para encontrar la gráfica de g , que resulta ser:



- $(f * g)(x) = (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(t-s)ds$. Viendo esto gráficamente notamos que si $1 + x \leq 2$ i.e. si $x \leq 1$ y si $x \geq 3$, entonces $(f * g)(x) = 0$.



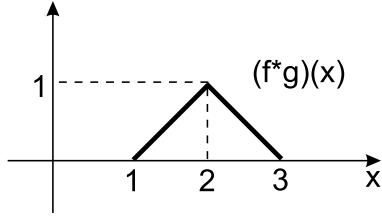
- Si $1 < x \leq 2$

$$(f * g)(x) = \int_2^{1+x} (-1)(-1)ds = s \Big|_2^{1+x} = x-1$$

- Si $2 < x < 3$

$$(f * g)(x) = \int_x^3 (-1)(-1)ds = s \Big|_x^3 = 3-x$$

$$\therefore (f * g)(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 3-x & \text{si } 2 < x < 3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

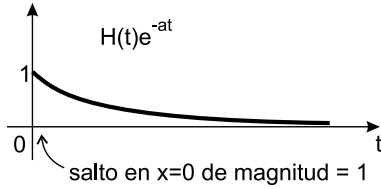


5. **Problema:** (M7CONV05)

- (a) Pruebe que la solución fundamental del operador $L = \frac{d}{dt} + aI$, $a \in \mathbb{R}$ es la función $g(t) = H(t)e^{-at}$, $a > 0$.
- (b) Usando (a) resuelva el problema de valores iniciales: (I) $\begin{cases} w'(t) + 3w(t) = t \\ w(0) = 4. \end{cases}$

Solución:

- (a) Debemos calcular $L_{gen}g = \left(\frac{d}{dt}\right)_{gen}g + ag$. Pero $\left(\frac{d}{dt}\right)_{gen}g(t) = g'_{cl}(t) + \delta(t)$.



Como $g'_{cl} = -ae^{-at}$ queda: $L_{gen}g(t) = H(t)(-ae^{-at}) + \delta(t) + aH(t)e^{-at} = \delta(t)$. Por lo tanto $g(t)$ es una solución fundamental de L .

- (b) Vemos que en el problema (I) aparece el operador diferencial lineal $L = \frac{d}{dt} + 3I$. Determinemos el problema generalizado asociado a (I).

Sea $u(t) = H(t)w(t)$, con $w(t)$ solución de (I), de donde

$$\begin{aligned} L_{gen}u(t) &= \left(\left(\frac{d}{dt}\right)_{gen} + 3I\right)u(t) \\ &= H(t)w'(t) + w(0)\delta(t) + 3H(t)w(t) \\ &= H(t)w'(t) + 4\delta(t) + 3H(t)w(t) \\ &= H(t)[w'(t) + 3w(t)] + 4\delta(t) \\ &= H(t)t + 4\delta(t) := \tilde{f}(t) \end{aligned}$$

De aquí:

$$(II) \quad \begin{cases} \left(\left(\frac{d}{dt}\right)_{gen} + 3I\right)u(t) = \tilde{f}(t) \\ u(t) = 0 \\ f(t) = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{en } t < 0 \\ \text{en } t < 0 \end{array}$$

Problema Generalizado.

Dado que la función de Green asociada a L es $g(t) = H(t)e^{-3t}$ (por (i)), tenemos que la solución particular de (II) es:

$$u(t) = (g * \tilde{f})(t) = H(t)e^{-3t} * (tH(t) + 4\delta(t))$$

que en forma explícita es:

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} H(s)e^{-3t}H(t-s)(t-s)ds + 4H(t)e^{-3t} \\ &= \int_0^t e^{-3t}(t-s)da + 4H(t)e^{-3t} \\ &= H(t) \left[\int_0^t e^{-3t}(t-s)da + 4e^{-3t} \right]. \end{aligned}$$

De donde $w(t) = \int_0^t e^{-3t}(t-s)ds + 4e^{-3t}$ es solución de (I).

6. **Problema:** (M7CONV06) Resolver, usando convolución y funciones generalizadas, el siguiente problema de valores iniciales:

$$(I) \quad \begin{cases} \left(\frac{d^2}{dt^2}\right)w(t) + 3\frac{d}{dt}w(t) + 2w(t) = e^t \\ w(0) = 2 \\ w'(0) = 1 \end{cases}$$

Solución: Pasemos al problema generalizado. Buscamos solución del problema para $t \geq 0$. Reemplazamos $w(t)$ por la función suave a trozos $u(t) = H(t)w(t)$ y tomamos derivadas en el sentido generalizado:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}\right)_{gen} u(t) &= H(t)w'(t) + w(0)\delta(t) \\ &= H(t)w'(t) + 2\delta(t) \left(\frac{d^2}{dt^2}\right)_{gen} u(t) \\ &= H(t)w''(t) + w'(0)\delta(t) + 2\delta'(t) \\ &= H(t)w''(t) + \delta(t) + 2\delta'(t) \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dt^2}\right)_{gen} u(t) + 3\left(\frac{d}{dt}\right)_{gen} u(t) + 2u(t) &= H(t)w''(t) + \delta(t) + 2\delta'(t) \\ &\quad + 3H(t)w'(t) + 6\delta(t) + 2H(t)w(t) \\ &= H(t)[w''(t) + 3w'(t) + 2w(t)] + 7\delta(t) + 2\delta'(t) \\ &= H(t)e^t + 7\delta(t) + 2\delta'(t) =: \tilde{f}(t) \end{aligned}$$

De donde resulta:

$$(II) \quad \begin{cases} u''_{gen}(t) + 3u'_{gen}(t) + 2u(t) = \tilde{f}(t) \\ u(t) = 0 \\ \tilde{f}(t) = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{en } t < 0 \\ \text{en } t < 0 \end{array}$$

Problema Generalizado

Para resolver este problema usando convolución, busamos la función de Green asociada al operador $L = \frac{d^2}{dt^2} + 3\frac{d}{dt} + 2I$. Para ello resolvemos:

$$\begin{cases} Lg(t) = 0 \\ g(0) = 0 \\ g'(0) = 1 \\ g(t) = 0 \text{ en } t < 0 \end{cases}$$

Tomamos la ecuación característica asociada a L , $\alpha^2 + 3\alpha + 2 = 0$ cuya factorización es $(\alpha + 1)(\alpha + 2) = 0$ $\therefore \alpha = -1, \alpha = -2$. Por tanto, las soluciones de $Lg(t) = 0$ son de la forma $g(t) = Ae^{-2t} + Be^{-t}$. Pero $g(0) = 0 \Rightarrow g(0) = A + B = 0$ y $g'(0) = 1 \Rightarrow g'(t) \Big|_{t=0} = (-2Ae^{-2t} - Be^{-t}) \Big|_{t=0} = -2A - B = 1$, i.e.: $\begin{cases} A + B = 0 \\ -2A - B = 1 \end{cases} \Rightarrow A = -1, B = 1$ $\therefore g(t) = H(t)(e^{-t} - e^{-2t})$ es la función de Green buscada, i.e g es solución de $\begin{cases} Lg(t) = \delta(t) \\ g(t) = 0 \end{cases}$ en $t < 0$.

Ahora podemos escribir la solución $u(t)$ como $u(t) = (g * \tilde{f})(t) = H(t)(e^{-t} - e^{-2t}) * (H(t)e^t + 7\delta(t) + 2\delta'(t))$ que en forma explícita sería:

$$\begin{aligned} u(t) &= [H(t)(e^{-t} - e^{-2t}) * (H(t)e^t)] \\ &\quad + [H(t)(e^{-t} - e^{-2t}) * 7\delta(t)] \\ &\quad + [H(t)(e^{-t} - e^{-2t}) * 2\delta'(t)] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} H(s)(e^{-s} - e^{-2s})H(t-s)e^{t-s}ds \\ &\quad + 7H(t)(e^{-t} - e^{-2t}) + 2\left(\frac{d}{dt}\right)_{gen} [H(t)(e^{-t} - e^{-2t})] \\ &= \int_0^t (e^{-s} - e^{-2s})e^{t-s}ds + 7H(t)(e^{-t} - e^{-2t}) \\ &\quad + 2H(t)(2e^{-t} - e^{-2t}) \\ &= H(t)\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}e^{-3t} - \frac{1}{2}e^{-2t}\right) + 7H(t)(e^{-t} - e^{-2t}) \\ &\quad + 2H(t)(2e^{-t} - e^{-2t}) \\ &= \left(\frac{1}{6}e^t - \frac{8}{3}e^{-2t} + \frac{9}{2}e^{-t}\right)H(t) \\ \therefore u(t) &= H(t)\left(\frac{1}{6}e^t - \frac{8}{3}e^{-2t} + \frac{9}{2}e^{-t}\right) \end{aligned}$$

De donde la solución del problema (I) es:

$$w(t) = \frac{1}{6}e^t - \frac{8}{3}e^{-2t} + \frac{9}{2}e^{-t}.$$

7. **Problema:** (M7CONV07) Hallar todas las soluciones $f(x)$ de la ecuación $x^2 f(x) = \delta(x)$.

Solución:

Interpretamos $f(x)$ y $\delta(x)$ como distribuciones, tomando como espacio de funciones de prueba $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Luego $\langle x^2 f(x) | \phi(x) \rangle = \langle f(x) | x^2 \phi(x) \rangle = \phi(0) = \langle \delta(x) | \phi(x) \rangle$. Pero $\left(\frac{d}{dx}\right)^2 x^2 \phi(x) = 2\phi(x) + 4x\phi'(x) + x^2\phi''(x)$ cuyo valor en $x = 0$ es $2\phi(0)$.

Por lo tanto $f_0(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx}\right)^2 \delta(x)$ es una solución particular. Nos queda hallar la solución general de la ecuación homogénea $x^2 g(x) = 0$. Es fácil ver que $g(x) = c_0\delta(x) + c_1\delta'(x)$ la cumple, y que $\langle g | 1 \rangle = c_0$, $\langle g | x \rangle = -c_1$.

Hay otra $h(x)$ tal que $x^2 h(x) = 0$ que no sea de la forma de g ? No, porque se puede definir $g(x)$ con las constantes $\langle h | 1 \rangle = c_0$, $\langle h | x \rangle = -c_1$. Entonces $\langle h(x) - g(x) | a + bx \rangle = 0 \forall a, b$.

Pero cualquier $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ tiene la forma $\phi(x) = a + bx + x^2\psi(x)$ donde $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, y $\langle h(x) - g(x) | x^2\psi(x) \rangle = 0$ $\therefore h(x) = g(x)$. Así, pues $f(x) = c_0\delta(x) + c_1\delta'(x) + \frac{1}{2}\delta''(x)$ •

Solución usando transformadas de Laplace

$$t^2 u(t) = \delta(t)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} u(z) = 1$$

$$u(z) = \frac{z^2}{2} + c_0 z + c_1$$

$$u(t) = \frac{\delta''(t)}{2} + c_0\delta'(t) + c_1\delta(t)$$

Problemas sobre Transformadas de Laplace

1. **Problema:** (M7LAP01) Usando los teoremas operacionales, calcule la transformada de Laplace de las siguientes funciones:

(a) $H(t)t^3 e^{2t}$

(b) $H(t) \sin^2 t$

(c) $H(t)t^2 \cos ht, t \geq 0$

(d) $\left(\frac{d}{dt}\right)_{gen} (H(t) - H(t-1))$

(e) $H(t-3)(t-1)$

(f) $H(t)e^{-t} * \left(\frac{d}{dt}\right)_{gen} (H(t+1)e^{-t})$

mas (i) de (a) y (i), (ii) de (b) tenemos que:

$$\begin{aligned} H(t) &\xrightarrow{\text{TL}} \frac{1}{z} \\ H(t)t^2 &\xrightarrow{\text{TL}} \frac{2}{z^3} \\ H(t)t^2 e^t &\xrightarrow{\text{TL}} \frac{2}{(z-1)^3} \\ H(t)t^2 e^{-t} &\xrightarrow{\text{TL}} \frac{2}{(z+1)^3} \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} &H(t)t^2 (e^t + e^{-t}) \\ &\xrightarrow{\text{TL}} \frac{1}{2} \left[\frac{2}{(z-1)^3} + \frac{2}{(z+1)^3} \right] \\ &= \frac{1}{(z-1)^3} + \frac{1}{(z+1)^3} \\ &= 2z \frac{z^2 + 3}{(z^2 - 1)^3}. \end{aligned}$$

- (d) Si $u(t) \xrightarrow{\text{TL}} U(z)$ entonces $u'_{\text{gen}}(t) \xrightarrow{\text{TL}} zU(z)$ y $u(t-t_0) \xrightarrow{\text{TL}} U(z)e^{-t_0 z}$.

Así: $H(t) \xrightarrow{\text{TL}} \frac{1}{z} \Rightarrow H(t-1) \xrightarrow{\text{TL}} \frac{1}{z} e^{-z}$ de donde, por el teorema operacional de linealidad se tiene que:

$$\begin{aligned} H(t) - H(t-1) &\xrightarrow{\text{TL}} \frac{1}{z} - \frac{1}{z} e^{-z} \\ &= \frac{1}{z} (1 - e^{-z}) \\ &\Rightarrow \left(\frac{d}{dt} \right)_{\text{gen}} (H(t) - H(t-1)) \\ &\xrightarrow{\text{TL}} z \frac{1}{z} (1 - e^{-z}) = 1 - e^{-z}. \end{aligned}$$

- (e) La función $t-1$, $t \geq 3$ puede escribirse como $H(t-3)(t-1)$. Usando los teoremas de traslación en el tiempo, derivada generalizada en el tiempo y linealidad, obtenemos que:

$$\begin{aligned} H(t-3) &\xrightarrow{\text{TL}} \frac{1}{z} e^{-3z} \Rightarrow tH(t-3) \\ &\xrightarrow{\text{TL}} - \left(\frac{e^{-3z}}{z} \right)' = \frac{3e^{-3z}}{z} + \frac{e^{-3z}}{z^2} \\ H(t-3)(t-1) &= H(t-3)t - H(t-3) \\ &\xrightarrow{\text{TL}} \frac{3e^{-3z}}{z} + \frac{e^{-3z}}{z^2} - \frac{e^{-3z}}{z} \\ &= \frac{2e^{-3z}}{z} + \frac{e^{-3z}}{z^2} = \frac{e^{-3z}}{z} \left(2 + \frac{1}{z} \right). \end{aligned}$$

Solución:

- (a) Si $u(t) \xrightarrow{\text{TL}} U(z)$, se tiene:

i. $t^k u(t) \xrightarrow{\text{TL}} (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} U(z)$

ii. $u(t)e^{z_0 t} \xrightarrow{\text{TL}} U(z-z_0)$.

Luego tomando $u(t) = H(t)$, sabemos que $H(t) \xrightarrow{\text{TL}} \frac{1}{z}$; de donde por (i) $t^3 H(t) \xrightarrow{\text{TL}} (-1)^3 \left(\frac{1}{z} \right)''' = \frac{6}{z^4}$ y por (ii) $t^3 H(t)e^{2t} \xrightarrow{\text{TL}} \frac{6}{(z-2)^4}$.

Observación: Aplicamos (ii) para $U(z) = \frac{6}{z^4}$ y $z_0 = 2$, luego $U(z-z_0) = U(z-2) = \frac{6}{(z-2)^4}$. Moraleja: no confundir con $\tilde{U}(z) = \frac{6}{z^4 - 2}$.

- (b) Escribimos

$$\begin{aligned} H(t) \sin t &= H(t) \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^2 \\ &= H(t) \left[-\frac{1}{4} (e^{2it} + e^{-2it} - 2) \right]. \end{aligned}$$

Así que calcular la transformada de Laplace para la función $H(t) \sin^2 t$ es lo mismo que calcularla para la función: $-\frac{1}{4} H(t) (e^{2it} + e^{-2it} - 2)$.

Usaremos los teoremas operacionales siguientes:

- Linealidad.
- Traslación en el plano de frecuencias.

De nuevo, sabemos que $H(t) \xrightarrow{\text{TL}} \frac{1}{z}$, entonces por (ii) $H(t)e^{2it} \xrightarrow{\text{TL}} \frac{1}{z-2i}$ ($z_0 = 2i$) y $H(t)e^{-2it} \xrightarrow{\text{TL}} \frac{1}{z+2i}$ ($z_0 = -2i$). Luego por (a) $\frac{1}{4} H(t) (2 - e^{2it} - e^{-2it}) = \frac{1}{4} H(t) - \frac{1}{4} H(t)e^{2it} - \frac{1}{4} H(t)e^{-2it} \xrightarrow{\text{TL}} \frac{1}{4z} - \frac{1}{4(z-2i)} - \frac{1}{4(z+2i)} = \frac{1}{4} \left[\frac{2}{z} - \frac{1}{z-2i} - \frac{1}{z+2i} \right] = \frac{2}{z^3 + 4z}$.

- (c) Escribimos $H(t)t^2 \cos ht$, $t \geq 0$ como $H(t)t^2 \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)$, luego usando los teore-

(f) Traslación en el tiempo:

$$H(t+1) \xrightarrow{\text{TL}} \frac{1}{z} e^z$$

Traslación en frecuencia:

$$H(t+1)e^{-t} \xrightarrow{\text{TL}} \frac{e^{z+1}}{z+1}$$

Derivada Generalizada en el tiempo:

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{gen} [H(t+1)e^{-t}] \xrightarrow{\text{TL}} z \frac{e^{z+1}}{z+1}$$

Convolución en el tiempo:

$$H(t)e^{-t} * \left(\frac{d}{dt}\right)_{gen} [H(t+1)e^{-t}] \xrightarrow{\text{TL}} \frac{1}{z+1} \cdot z \frac{e^{z+1}}{z+1} = z \left(\frac{e^{z+1}}{z+1}\right)^2.$$

2. Problema: (M7LAP02)

- (a) Encuentre la distribución $K(t)$ cuya transformada de Laplace es $U(z) = \frac{z}{1+z}$.
- (b) Envalúe $K(t)$ en $\phi(t) = e^{-t}$.

Solución:

- (a) Note que $U(z) = z \frac{1}{1+z}$. Sabemos que $H(t) \xrightarrow{\text{TL}} \frac{1}{z}$ y que por el teorema operacional de traslación en frecuencia $H(t)e^{-t} \xrightarrow{\text{TL}} \frac{1}{z+1}$. También sabemos que la derivada generalizada en tiempo es igual a $\delta'(t) \xrightarrow{\text{TL}} z$. Así por el teorema operacional de convolución: $K(t) = \delta'(t) * H(t)e^{-t} = \left(\frac{d}{dt}\right) [\delta(t) * H(t)e^{-t}] = \left(\frac{d}{dt}\right) H(t)e^{-t} = \left(\frac{d}{dt}\right)_{gen} (H(t)e^{-t}) \xrightarrow{\text{TL}} \frac{z}{1+z}$.

- (b) $K(t) = -H(t)e^{-t} + \delta(t)$, luego:

$$\begin{aligned} \langle K(t) | \phi(t) \rangle &= \langle -H(t)e^{-t} + \delta(t) | e^{-t} \rangle \\ &= -\langle H(t)e^{-t} | e^{-t} \rangle + \langle \delta(t) | e^{-t} \rangle \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} H(t)e^{-t}e^{-t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-t} dt \\ &= -\int_0^{\infty} e^{-2t} dt + 1 = \frac{1}{2} e^{-2t} \Big|_0^{\infty} + 1 \\ &= -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

3. Problema: (M7LAP03) Encuentre la función causal $u(t)$ cuya transformada de Laplace es:

$$(a) U(z) = \frac{1}{(z+1)^2}$$

$$(b) V(z) = \frac{e^{2z}}{(z+3)}$$

Solución:

- (a) Observamos que $U(z) = \frac{1}{1+z} \cdot \frac{1}{1+z}$, aplicamos el teorema de convolución en el tiempo para:

$$H(t)e^{-t} \xrightarrow{\text{TL}} \frac{1}{1+z}$$

así

$$\begin{aligned} U(t) &= H(t)e^{-t} * H(t)e^{-t} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H(s)e^{-s} H(t-s)e^{-(t-s)} ds \\ &= H(t) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s} e^{-t+s} ds \\ &= H(t) t e^{-t} \end{aligned}$$

Observación : Este problema también puede resolverse usando el teorema operacional de derivación respecto a la frecuencia.

- (b) Como se ha dicho $1/z$ es la TL de $H(t)$, entonces $1/(3+z)$ es la TL de $H(t)e^{-3t}$ (Traslación en Frecuencia). Finalmente $V(z)$ es la TL de $H(t+2)e^{-3(t+2)}$ (Traslación en el Tiempo)

4. Problema: (M7LAP04) Muestre que para cualquier $n \geq 0$ $\delta^{(n)}(t)$ tiene por TL la función z^n

Solución: Usamos inducción en n

- (a) $n = 0$ $\text{TL} \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-zt} dt = \langle \delta(t) | e^{-zt} \rangle = e^{-z \cdot 0} = 1 = z^0$
- (b) Supongamos el resultado cierto para n , i.e., $\delta^{(n)} = z^n$ y probémoslo para $n+1$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n+1)}(t)e^{-zt} dt &= \langle \delta^{(n+1)} | e^{-zt} \rangle \\ &= \left\langle \frac{d}{dt}_{gen} \delta^{(n)} | e^{-zt} \right\rangle = -\langle \delta^{(n)} | \frac{d}{dt} e^{-zt} \rangle \\ &= z \langle \delta^{(n)} | e^{-zt} \rangle = z \cdot z^n = z^{n+1}. \end{aligned}$$

5. **Problema:** (M7LAP05) Existe $u(t) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ tal que $u(t) \equiv 0$ en $-\infty < t < 0$ con $\text{TL}u(t) = \frac{e^z}{e^z + 1}$

- (a) Obtenga la TL de $u(t) - u(t-2)$.
(b) Escriba $u(t) - u(t-2)$ en forma explícita.
(c) Observe que:

$$\begin{aligned} u(t) &= (u(t) - u(t-2)) \\ &\quad + (u(t-2) - u(t-4)) \\ &\quad + (u(t-4) - u(t-6)) + \dots \end{aligned}$$

Escriba entonces $u(t)$ en forma explícita.

Solución:

- (a) Llamemos $U(z) = \text{TL}u(t)$ Si

$$u(t) \xrightarrow{\text{TL}} U(z) = \frac{e^z}{e^z + 1}$$

como

$$u(t - t_0) \xrightarrow{\text{TL}} e^{-t_0 z} U(z)$$

se tiene

$$u(t-2) \xrightarrow{\text{TL}} \frac{e^z}{e^z + 1} \cdot e^{-2z} = \frac{e^{-z}}{e^z + 1}$$

de donde

$$\begin{aligned} \text{TL}(u(t) - u(t-2)) &= \frac{e^z}{e^z + 1} - \frac{e^{-z}}{e^z + 1} \\ &= \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + 1} \end{aligned}$$

- (b) Por (i)

$$\begin{aligned} u(t) - u(t-2) &\xrightarrow{\text{TL}} \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + 1} = \frac{e^{-z}(e^{2z} - 1)}{e^z + 1} \\ &= \frac{e^{-z}(e^z - 1)(e^z + 1)}{e^z + 1} = 1 - e^{-z} \end{aligned}$$

Pero

$$\delta(t) - \delta(t-1) \xrightarrow{\text{TL}} 1 - e^{-z}$$

Por tanto tenemos

$$u(t) - u(t-2) = \delta(t) - \delta(t-1)$$

- (c) Como

$$u(t) - u(t-2) = \delta(t) - \delta(t-1)$$

entonces reemplazando t por $t-a$, se tiene:

$$u(t-a) - u(t-2-a) = \delta(t-a) - \delta(t-a-1)$$

así

$$\begin{aligned} u(t) &= \delta(t) - \delta(t-1) + \delta(t-2) \\ &\quad - \delta(t-3) + \delta(t-4) - \delta(t-5) + \dots \end{aligned}$$

6. **Problema:** (M7LAP06) Se pide $w(t) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ que satisfaga:

$$\begin{aligned} w'''(t) - w''(t) + w'(t) - w(t) &= 0 \\ w(0) = 0, w'(0) = 0, w''(0) &= 1 \end{aligned}$$

- (a) Obtenga una ecuación en derivadas generalizadas para $u(t) = H(t)w(t)$.
(b) Calcule la TL de $u(t)$.
(c) Obtenga la función $w(t)$.

Solución:

- (a) Sea

$$\begin{aligned} u(t) &= H(t)w(t) \\ u'_{gen}(t) &= H(t)w'(t) + w(0)\delta(t) \\ &= H(t)w'(t) \\ u''_{gen}(t) &= H(t)w''(t) + w'(0)\delta(t) \\ &= H(t)w''(t) \\ u'''_{gen}(t) &= H(t)w'''(t) + w''(0)\delta(t) \\ &= H(t)w'''(t) + \delta(t) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} u'''_{gen}(t) - u''_{gen}(t) + u'_{gen}(t) - u(t) &= H(t)(w'''(t) - w''(t) \\ &\quad + w'(t) - w(t)) + \delta(t) \\ &= \delta(t) \end{aligned}$$

Observe que $u(t)$ es la función de Green asociada al operador:

$$L = \left(\frac{d}{dt}\right)^3 - \left(\frac{d}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}\right) - I$$

Por lo tanto

$$L_{gen}u(t) = \delta(t)u(t) = 0 \text{ en } t < 0.$$

- (b) De la teoría de EDO lineales homogéneas con coeficientes constantes sabemos que la solución $w(t)$ de $Lw(t) = 0$ está acotada por alguna función exponencial para $t \gg 0$. Luego podemos decir que existe la TL de la función causal $u(t) = H(t)w(t)$, llamemos a ésta TL $U(z)$.

Así tomando TL a ambos lados de la ecuación generalizada hallada en (i) se tiene:

$$\begin{aligned} z^3 U(z) - z^2 U(z) + z U(z) - U(z) &= 1 \\ \Rightarrow U(z) &= \frac{1}{z^3 - z^2 + z - 1} \end{aligned}$$

- (c) Aplicamos el método de los residuos para calcular $u(t)$ (considerando que $U(z)$ es racional)

$$\begin{aligned} U(z) &= \frac{1}{z^3 - z^2 + z - 1} \\ &= \frac{1}{(z-1)(z^2+1)} = R(z) \end{aligned}$$

Luego

$$u(t) = H(t) [\text{Res}_{z=1} R(z)e^{zt} + \text{Res}_{z=i} R(z)e^{zt} + \text{Res}_{z=-i} R(z)e^{zt}]$$

$$\text{Res}_{z=1} R(z)e^{zt} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{e^{zt}}{z^2 + 1} = \frac{e^t}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Res}_{z=i} R(z)e^{zt} &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{e^{zt}}{(z-1)(z+i)} \\ &= \frac{e^{it}}{(i-1)2i} = \frac{e^{it}}{-2-2i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Res}_{z=-i} R(z)e^{zt} &= \lim_{z \rightarrow -i} \frac{e^{zt}}{(z-1)(z-i)} \\ &= \frac{e^{-it}}{(-i-1)(-2i)} = \frac{e^{-it}}{-2+2i} \end{aligned}$$

Por tanto

$$u(t) = H(t) \left(\frac{e^t}{2} - \frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{2} \sin t \right)$$

y esto implica que:

$$w(t) = \frac{e^t}{2} - \frac{1}{2}(\cos t + \sin t).$$

7. **Problema:** (M7LAP07) Se pide $w(t) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ que satisfaga:

$$\begin{aligned} Lw(t) &= 0 \\ w(2) &= 0 \\ w'(2) &= -1 \\ w''(2) &= -1 \end{aligned}$$

donde

$$L = \left(\frac{d}{dt} \right)^3 - \left(\frac{d}{dt} \right)^2 + \frac{d}{dt} - I$$

póngase

$$u(t) = H(t-2)w(t)$$

- (a) Calcule $L_{gen} u(t)$.
 (b) Calcule la TL de $u(t)$.
 (c) Calcule $w(t)$.

Solución:

(a)

$$\begin{aligned} u'_{gen}(t) &= H(t-2)w'(t) + w(2)\delta(t-2) \\ &= H(t-2)w'(t) \\ u''_{gen}(t) &= H(t-2)w''(t) + w'(2)\delta(t-2) \\ &= H(t-2)w''(t) - \delta(t-2) \\ u'''_{gen}(t) &= H(t-2)w'''(t) + w''(2)\delta(t-2) - \delta'(t-2) \\ &= H(t-2)w'''(t) - \delta(t-2) - \delta'(t-2) \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} L_{gen} u(t) &= H(t-2)(w'''(t) - w''(t) + w'(t) - w(t)) \\ &\quad - \delta(t-2) - \delta'(t-2) + \delta(t-2) \\ &= H(t-2)Lw(t) - \delta'(t-2) = -\delta'(t-2) \end{aligned}$$

- (b) Aplicando TL a ambos lados de la ecuación generalizada encontrada en (a) obtenemos que:

$$\begin{aligned} (z^3 - z^2 + z - 1)U(z) &= -ze^{-2z} \\ \Rightarrow U(z) &= \frac{-ze^{-2z}}{z^3 - z^2 + z - 1} \end{aligned}$$

- (c) Aplicamos TLI a $U(z) = \frac{-z}{(z-1)(z^2+1)} \cdot e^{-2z} = R(z)e^{-2z}$. Luego si la TLI de $R(z)$ es $r(t)$, puesto que la TLI de e^{-2z} es $\delta(t-2)$ se tiene que $u(t) = r(t) * \delta(t-2) = r(t-2)$. Calculemos $r(t)$ usando residuos:

$$\begin{aligned} r(t) &= H(t) [\text{Res}_{z=1} R(z)e^{tz} + \text{Res}_{z=i} R(z)e^{tz} + \text{Res}_{z=-i} R(z)e^{tz}] \\ \text{Res}_{z=1} R(z)e^{tz} &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-z}{z^2 + 1} \cdot e^{tz} = \frac{-1}{2} e^t \\ \text{Res}_{z=i} R(z)e^{tz} &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{-ze^{tz}}{(z-1)(z+i)} \\ &= \frac{-ie^{it}}{(i-1)(2i)} = \frac{e^{it}}{2-2i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Res}_{z=-i} R(z)e^{tz} &= \lim_{z \rightarrow -i} \frac{-ze^{tz}}{(z-1)(z-i)} \\ &= \frac{ie^{-it}}{(-i-1)(-2i)} = \frac{e^{-it}}{2+2i}\end{aligned}$$

Por tanto

$$r(t) = H(t) \left(\frac{-1}{2}e^t + \frac{e^{it}}{2-2i} + \frac{e^{-it}}{2+2i} \right)$$

De donde

$$\begin{aligned}u(t) &= r(t-2) \\ &= H(t-2) \left(\frac{-1}{2}e^{t-2} + \frac{e^{i(t-2)}}{2-2i} + \frac{e^{-i(t-2)}}{2+2i} \right)\end{aligned}$$

y así

$$w(t) = \frac{-1}{2}e^{t-2} + \frac{e^{i(t-2)}}{2-2i} + \frac{e^{-i(t-2)}}{2+2i}.$$

8. **Problema:** (M7LAP08) Usando TL halle la función $w(t) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ tal que: $\left(\frac{d}{dt}\right)^2 w(t) - 8\frac{d}{dt}w(t) + 25w(t) = e^{4t}$ con $w(0) = 0$ y $w'(0) = 1$

Solución: Hallamos la ecuación generalizada correspondiente para $u(t) = H(t)w(t)$:

$$\begin{aligned}u'_{gen}(t) &= H(t)w'(t) + w(0)\delta(t) \\ &= H(t)w'(t) \\ u''_{gen}(t) &= H(t)w''(t) + w'(0)\delta(t) \\ &= H(t)w''(t) + \delta(t)\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}u''_{gen}(t) - 8u'_{gen}(t) + 25u(t) &= H(t)(w''(t) - 8w'(t) + 25w(t)) + \delta(t) \\ &= H(t)e^{4t} + \delta(t) \\ \therefore u''_{gen}(t) - 8u'_{gen}(t) + 25u(t) &= H(t)e^{4t} + \delta(t)\end{aligned}$$

Aplicando TL a ambos lados de esta ecuación, y tomando $U(z) = TL u(t)$, tenemos:

$$\begin{aligned}z^2U(z) - 8zU(z) + 25U(z) &= \frac{1}{z-4} + 1 \\ &= \frac{z-3}{z-4} \Rightarrow U(z) = \frac{z-3}{(z-4)(z^2-8z+25)}\end{aligned}$$

Ahora aplicamos el método de los residuos a $U(z) = \frac{z-3}{(z-4)[z-(4+3i)][z-(4-3i)]}$

$$u(t) = H(t) [\text{Res}_{z=4} U(z)e^{tz}$$

$$+ \text{Res}_{z=4+3i} U(z)e^{tz} + \text{Res}_{z=4-3i} U(z)e^{tz}]$$

$$\text{Res}_{z=4} U(z)e^{tz} = \lim_{z \rightarrow 4} \frac{z-3}{z^2-8z+25} e^{tz} = \frac{e^{4t}}{4}$$

$$\begin{aligned}\text{Res}_{z=4+3i} U(z)e^{tz} &= \lim_{z \rightarrow 4+3i} \frac{(z-3)e^{tz}}{(z-4)[z-(4-3i)]} \\ &= \frac{(1+3i)e^{(4+3i)t}}{(3i)(6i)} = \frac{(1+3i)e^{(4+3i)t}}{-18}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Res}_{z=4-3i} U(z)e^{tz} &= \lim_{z \rightarrow 4-3i} \frac{(z-3)e^{tz}}{(z-4)[z-(4+3i)]} \\ &= \frac{(1-3i)e^{(4-3i)t}}{(-3i)(-6i)} = \frac{(1-3i)e^{(4-3i)t}}{-18}\end{aligned}$$

Por tanto

$$u(t) = \frac{1}{9}H(t)e^{4t} \left(1 - \frac{1}{2}(1+3i)e^{3it} - \frac{1}{2}(1-3i)e^{-3it} \right)$$

De donde:

$$w(t) = \frac{1}{9}e^{4t} \left(1 - \frac{1}{2}(1+3i)e^{3it} - \frac{1}{2}(1-3i)e^{-3it} \right).$$

9. **Problema:** (M7LAP09) Se pide $u(t)$ que cumpla $u(t) \equiv 0$ en $-\infty < t < 0$ y $u''_{gen}(t) + u'_{gen}(t) = H(t)e^{-t}$.

(a) Halle la TL de $u(t)$.

(b) Halle $u(t)$.

Solución:

- (a) Si $U(z) = TL u(t)$ entonces por teoremas operacionales obtenemos que:

$$\begin{aligned}u'_{gen}(t) &\xrightarrow{TL} zU(z) \\ u''_{gen}(t) &\xrightarrow{TL} z^2U(z) \\ H(t)e^{-t} &\xrightarrow{TL} \frac{1}{1+z}\end{aligned}$$

Por tanto aplicando TL a ambos lados de la ecuación generalizada dada, tenemos que:

$$\begin{aligned}(z^2+z)U(z) &= \frac{1}{1+z} \\ \Rightarrow U(z) &= \frac{1}{(z+1)(z^2+z)} \\ &= \frac{1}{z(z+1)^2}.\end{aligned}$$

- (b) Calculemos $u(t)$ usando el método de los residuos. Los polos de $U(z)$ están en $z = 0$ y $z = -1$.

$$u(t) = H(t) [\text{Res}_{z=0} U(z)e^{tz} + \text{Res}_{z=-1} U(z)e^{tz}]$$

$$\text{Res}_{z=0} U(z)e^{tz} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{tz}}{z} = 1$$

Por ser $z = -1$ un polo doble se tiene que:

$$\begin{aligned} \text{Res}_{z=-1} U(z)e^{tz} &= \left. \frac{d}{dz} \frac{e^{tz}}{z} \right|_{z=-1} \\ &= \left. \frac{(z-1)te^{tz}}{z^2} \right|_{z=-1} = (-1-t)e^{-t}. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$u(t) = H(t)[1 - (1+t)e^{-t}].$$

10. **Problema:** (M7LAP010) Se pide $u(t)$ que cumpla $u(t) \equiv 0$ en $t < 0$ y $tu''_{gen}(t) + u'_{gen}(t) = H(t)$, $u(1) = 0$

- (a) Halle la TL de $u(t)$.
(b) Halle $u(t)$.

Solución:

- (a) Sea $U(z) = \text{TL}u(t) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} u'_{gen}(t) &\xrightarrow{\text{TL}} zU(z) \\ u''_{gen}(t) &\xrightarrow{\text{TL}} z^2U(z) \end{aligned}$$

Como

$$tu(t) \xrightarrow{\text{TL}} -\frac{d}{dz}U(z)$$

Entonces

$$\begin{aligned} tu''(t) &\xrightarrow{\text{TL}} -\frac{d}{dz}[z^2U(z)] \\ &= -z^2U'(z) - 2zU(z), \end{aligned}$$

luego aplicando TL a ambos lados de la ecuación generalizada tenemos que:

$$\begin{aligned} -z^2U'(z) - 2zU(z) + zU(z) &= \frac{1}{z} \\ \Rightarrow -z(zU'(z) + U(z)) &= \frac{1}{z} \\ \Rightarrow \frac{d}{dz}[zU(z)] &= -1z^2 \\ \Rightarrow zU(z) &= \frac{1}{z} + c \end{aligned}$$

con c constante, así

$$U(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{c}{z}$$

- (b) Para esta $U(z)$ se tiene, por teoremas operacionales que:

$$u(t) = H(t)(c+t)$$

Como $u(1) = 0$ entonces $c = -1$

$$\therefore u(t) = H(t)(t-1).$$

11. **Problema:** (M7LAP011) Resuelva el siguiente problema de valores iniciales:

$$tx''_{gen}(t) + x'_{gen}(t) = \delta'(t - \pi)$$

$$x(0) = 0$$

$$x(t) \text{ causal}$$

Solución: Sea $X(z) = \text{TL}x(t)$. Entonces

$$\begin{aligned} x'_{gen}(t) &\xrightarrow{\text{TL}} zX(z) \\ x''_{gen}(t) &\xrightarrow{\text{TL}} z^2X(z) \\ tx''_{gen}(t) &\xrightarrow{\text{TL}} -\frac{d}{dz}[z^2X(z)] \end{aligned}$$

Aplicando TL a ambos lados de la ecuación generalizada se obtiene que:

$$\begin{aligned} -2zX(z) - z^2X'(z) + zX(z) &= ze^{-\pi z} \\ \Rightarrow zX'(z) + X(z) &= -e^{-\pi z} \\ \Rightarrow \frac{d}{dz}[zX(z)] &= -e^{-\pi z} \\ \Rightarrow X(z) &= \frac{e^{-\pi z}}{\pi z} + \frac{c}{z} \end{aligned}$$

Luego por teoremas operacionales se tiene que:

$$x(t) = \frac{1}{\pi}H(t - \pi) + cH(t)$$

Como

$$x(0) = 0 \text{ entonces } x(t) = \frac{1}{\pi}H(t - \pi).$$

12. **Problema:** (M7LAP012) Encuentre una solución causal y continua para la ecuación:

$$y''_{gen}(x) - 3y'_{gen}(x) + (2 - \delta(x))y(x) = 0$$

Solución: Como $y(x)\delta(x) = y(0)\delta(x)$ obtenemos que:

$$y''_{gen}(x) - 3y'_{gen}(x) + 2y(x) = y(0)\delta(x)$$

Aplicando TL a ambos lados de ésta ecuación tenemos que:

$$(z^2 - 3z + 2)Y(z) = y(0) \\ \Rightarrow Y(z) = \frac{y(0)}{(z-2)(z-1)}$$

Usando residuos tenemos:

$$y(x) = H(x)y(0) [\text{Res}_{z=2}Y(z)e^{xz} + \text{Res}_{z=1}Y(z)e^{xz}]$$

$$\text{Res}_{z=2}Y(z)e^{xz} = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{e^{xz}}{z-1} = e^{2x}$$

$$\text{Res}_{z=1}Y(z)e^{xz} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{e^{xz}}{z-2} = -e^x$$

Luego:

$$y(x) = H(x)y(0)(e^{2x} - e^x),$$

suponiendo que una solución $U(x)$ existe. Al sustituir $x = 0$, se tiene que $y(0) = y(0)(H(x)e^{2x} - e^x)|_{x=0} = 0$, luego $y(0) = 0$ y $y(x) = 0$. •

4 Problemas resueltos de Transformada de Fourier

Las siguientes funciones: $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(w)e^{iwx} dw$ y $g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx} dx$ definen la transformada de Fourier directa de $g(w)$ y la transformada de Fourier inversa de $f(x)$ respectivamente. A veces se usará esta otra notación:

$$\hat{f}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iwx} dx \quad (\text{TFD de } f(x)) \quad y \\ f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)e^{-iwx} dw \quad (\text{TFI de } \hat{f}(w))$$

Ejercicios resueltos

- Problema:** (M7TRFou01) A partir del hecho conocido $\sqrt{2\pi}e^{-x^2/2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2/2}e^{iwx} dw$ evalúe $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} w^2e^{-2w^2}e^{iwx} dw$ haciendo uso de los teoremas operacionales.

Solución: Sea $f(x) = \sqrt{(2\pi)}e^{-x^2/2}$ y $g(w) = e^{-w^2/2}$. Por hipótesis se tiene $f(x) \leftrightarrow g(w)$ por lo tanto $f(x/c)/c \leftrightarrow g(cw)$. Buscando c se hace $g(w) = e^{-(cw)^2/2}$, de donde $e^{-\frac{(cw)^2}{2}} = e^{-2w^2}$, lo que implica $-(cw)^2 = -4w^2$, es decir $c = 2$. Se obtiene:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}e^{-x^2/8} = \frac{1}{2}f(x/2) \longleftrightarrow e^{-2w^2}.$$

Aplicando esto último al siguiente teorema operacional $f''(x) \leftrightarrow (iw)^2g(w)$ resultando:

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\left(\frac{x^2}{16} - \frac{1}{4}\right)e^{-x^2/8} \longleftrightarrow -w^2e^{-2w^2}$$

Por lo tanto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} w^2e^{-2w^2}e^{iwx} dw = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{x^2}{16}\right)e^{-x^2/8}.$$

- Problema:** (M7TRFou02) Considere las siguientes funciones:

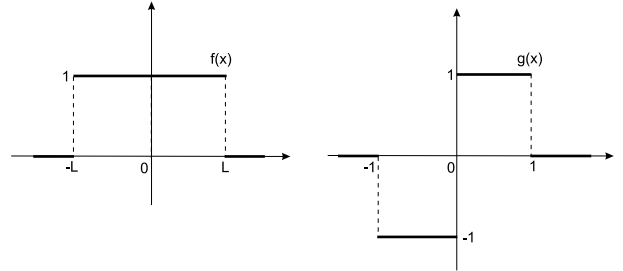
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ -1 & \text{si } -1 < x < 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Determine $h(x) = (f * g)(x)$ y dibuje su gráfica.
- Determine $\hat{h}(w)$.

Solución:

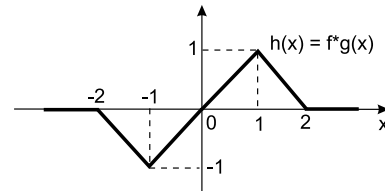
-



$$h(x) = f * g(x)$$

$$= g * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(s)f(x-s) ds$$

$$= \begin{cases} \int_{-1+x}^0 (-1) ds + \int_0^1 ds = x & -1 < x < 1 \\ \int_{-1+x}^1 ds = 2 - x & 1 < x < 2 \\ \int_{-1}^{1+x} (-1) ds = -x - 2 & -2 < x < -1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$



(b) Como $\hat{h}(w) = \hat{f}(w)\hat{g}(w)$, donde:

$$\begin{aligned}\hat{f}(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iwx} dx = \int_{-1}^1 e^{iwx} dx = 2 \frac{\sin w}{w} \\ \hat{g}(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{iwx} dx \\ &= \int_{-1}^0 -e^{iwx} dx + \int_0^1 e^{iwx} dx = \frac{2}{iw}(\cos w - 1)\end{aligned}$$

Se tiene:

$$\hat{h}(w) = 2 \frac{\sin w}{w} \frac{2}{iw}(\cos w - 1) = \frac{4}{iw^2} \sin w(\cos w - 1).$$

3. **Problema:** (M7TRFou0f3) Sea

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } |x| \leq \pi/2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(a) Calcule $\hat{f}(w)$

(b) Calcule $\int_0^{\infty} \frac{\cos(\pi t/2)}{1-t^2} dt$.

(c) Calcule $\int_0^{\infty} \frac{\cos^2(\pi t/2)}{(1-t^2)^2} dt$.

Solución:

(a) Sea

$$\begin{aligned}\hat{f}(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iwx} dx \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x(\cos wx + i \sin wx) dx \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \cos wx dx \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \cos x \cos wx dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos(x+wx) + \cos(x-wx) dx \\ &= \frac{\sin(\pi(1+w)/2)}{1+w} + \frac{\sin(\pi(1-w)/2)}{1-w} \\ &= \frac{\cos(\pi w/2)}{1+w} + \frac{\cos(\pi w/2)}{1-w} \\ &= 2 \frac{\cos(\pi w/2)}{1-w^2}\end{aligned}$$

(b) Como $\hat{f}(w) = \frac{2 \cos(\pi w/2)}{1-w^2}$ es una función analítica y $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(w)| dw < \infty$, se puede utilizar el Teorema de Plancharel, así: $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)e^{-iwx} dw$. Tomando $x = 0$ se tiene:

$$\begin{aligned}1 = f(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) dw \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{f}(w) dw \quad (\text{ya que } \hat{f} \text{ es par}) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{2 \cos(\pi w/2)}{1-w^2} dw\end{aligned}$$

$$\text{Por lo tanto: } \int_0^{\infty} \frac{\cos(\pi w/2)}{1-w^2} dw = \frac{\pi}{2}.$$

(c) Como $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$ se puede aplicar el Teorema de Parseval, así: $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(w)|^2 dw = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx$.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(w)|^2 dw \\ &= 4 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos^2(\pi w/2)}{(1-w^2)^2} dw \\ &= 8 \int_0^{\infty} \frac{\cos^2(\pi w/2)}{(1-w^2)^2} dw.\end{aligned}$$

Por otro lado:

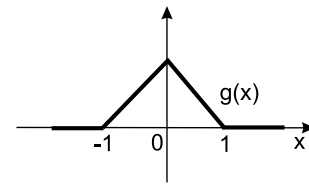
$$\begin{aligned}2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx &= 4\pi \int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx \\ &= 4\pi \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos(2x)}{2} dx = \pi^2.\end{aligned}$$

Luego:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos^2(\pi w/2)}{(1-w^2)^2} dw = \frac{\pi^2}{8}.$$

4. **Problema:** (M7TRFou0f4) Sea $f(x) = x(1 - |x|)(H(x+1) - H(x-1))$. Usando derivadas generalizadas encuentre $\hat{f}(w)$. Dé el valor numérico de $\hat{f}(\pi)$.

Solución: Sea $g(x) = (1 - |x|)(H(x+1) - H(x-1))$. Gráficamente:



Así $f(x) = xg(x)$. Luego

$$\begin{aligned}\hat{f}(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iwx} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} xg(x)e^{iwx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \frac{1}{i} \frac{d}{dw} (e^{iwx}) dx \\ &= \frac{1}{i} \frac{d}{dw} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{iwx} dx \\ &= -i \frac{d}{dw} \hat{g}(w).\end{aligned}$$

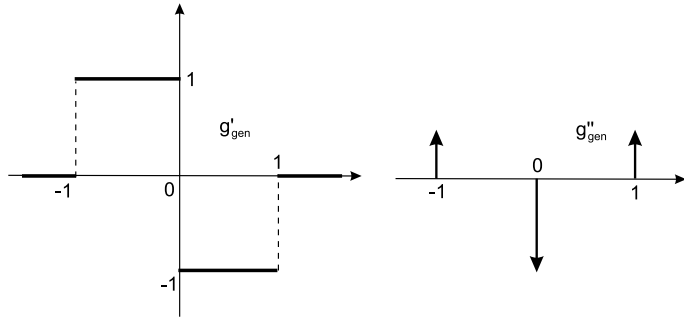
Calculando entonces $\hat{g}(w)$:

$$\begin{aligned}\hat{g}(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{iwx} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \frac{-1}{w^2} \frac{d^2}{dx^2} (e^{iwx}) dx \\ &= \frac{-1}{w^2} \int_{-\infty}^{\infty} g''_{gen}(x)e^{iwx} dx = (*)\end{aligned}$$

Pero

$$g'_{gen}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 < x < 0 \\ -1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\text{y } g''_{gen}(x) = \delta(x+1) - 2\delta(x) + \delta(x-1).$$



Por lo tanto

$$\begin{aligned} (*) &= \frac{-1}{w^2} \int_{-\infty}^{\infty} (\delta(x+1) - 2\delta(x) + \delta(x-1))e^{iwx} dx \\ &= \frac{-1}{w^2} (e^{-iw} - 2 + e^{iw}) = \frac{2}{w^2} (1 - \cos w).\end{aligned}$$

$$\text{Luego } \hat{f}(w) = -i \frac{d}{dw} \left(\frac{2}{w^2} (1 - \cos w) \right) = -i \frac{2}{w^3} (w \sin w - 2(1 - \cos w)).$$

El valor de

$$\hat{f}(\pi) = -i \frac{2}{\pi^3} (-2(1 - (-1))) = \frac{8i}{\pi^3}.$$

5. **Problema:** (M7TRFou05) Determine la Transformada de Fourier $\hat{f}(w)$ y el valor de $\hat{f}(-5)$ para la función $f(x) = xe^{-|x-2|+5xi}$.

Solución: Dado $\hat{f}(w) \leftrightarrow f(x)$ por los teoremas operacionales se tiene:

- (a) $e^{ibw} \hat{f}(w) \leftrightarrow f(x-b)$
- (b) $\frac{d}{dw} \hat{f}(w) \leftrightarrow ix f(x)$
- (c) $\hat{f}(w-a) \leftrightarrow e^{-iax} f(x)$

Si $\hat{f}(w) \leftrightarrow e^{-|x|}$ entonces aplicando a) se tiene $e^{2wi} \hat{f}(w) \leftrightarrow e^{-|x-2|}$ y por b) $-i \frac{d}{dw} (e^{2iw} \hat{f}(w)) \leftrightarrow xe^{-|x-2|}$. Pero $-i \frac{d}{dw} (e^{2iw} \hat{f}(w)) = -i(2ie^{2iw} \hat{f}(w) + e^{2iw} \hat{f}'(w)) = e^{i2w}(2\hat{f}(w) - i\hat{f}'(w))$, aplicando c) se tiene: $e^{2i(w+5)}(2\hat{f}(w+5) - i\hat{f}'(w+5)) \leftrightarrow xe^{-|x-2|}e^{5xi}$. Como la transformada de Fourier de $f(x) = e^{-|x|}$ es $\hat{f}(w) = 2/(1+w^2)$ y $\hat{f}'(w) = -4w/(1+w^2)^2$, se tiene que la transformada de Fourier de $f(x) = xe^{-|x-2|+5xi}$ es

$$\hat{f}(w) = e^{2i(w+5)} \left(\frac{4}{1+(w+5)^2} + \frac{4i(w+5)}{(1+(w+5)^2)^2} \right).$$

Por último $\hat{f}(-5) = 4$.

6. **Problema:** (M7TRFou06)

- (a) Sea $f \in \mathcal{C}^\infty$. Sea g la transformada de Fourier directa de f y h la de f' . Demuestre que $h(w) = -i w g(w)$.
- (b) Sabiendo que $i w \hat{\phi}(w) = e^{iw} - 1$. Encuentre $\phi(x)$ y dibuje su gráfica. SUGERENCIA: El Teorema operacional dado en a) también es válido a nivel de distribuciones.

Solución:

(a)

$$\begin{aligned}h(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{iwt} dt \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_R^0 f'(t)e^{iwt} dt + \int_0^R f'(t)e^{iwt} dt \right) \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} (f(t)e^{iwt} \Big|_{-R}^0 - iw \int_{-R}^0 e^{iwt} f(t) dt + \\ &\quad + e^{iwt} f(t) \Big|_0^R - iw \int_0^R e^{iwt} f(t) dt) \\ &\quad (\text{integración por partes})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f(0) - iw \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^0 f(t) e^{iwt} dt + \\
&\quad + \int_0^R e^{iwt} f(t) dt - f(0) \quad (\text{ya que } f \in \mathcal{C}_{\downarrow}^{\infty}) \\
&= -iw \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{iwt} dt \\
&= -iwg(w)
\end{aligned}$$

- (b) La sugerencia dice que si $f \in \mathcal{C}_{\downarrow}^{\infty}$ entonces $-iw\hat{f}(w) = \widehat{f'_{gen}}(w)$. En efecto:

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{f'_{gen}}(w), \phi(t) \rangle &= \langle f'_{gen}(t), \hat{\phi}(w) \rangle \\
&= -\langle f(t), \frac{d}{dw} \hat{\phi}(w) \rangle \\
&= -\langle f(t), \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) i t e^{iwt} dt \rangle \\
&= \langle f(t), \int_{-\infty}^{\infty} -it \phi(t) e^{iwt} dt \rangle \\
&= \langle \hat{f}(w), -it \phi(t) \rangle \\
&= \langle -iw \hat{f}(w), \phi(t) \rangle.
\end{aligned}$$

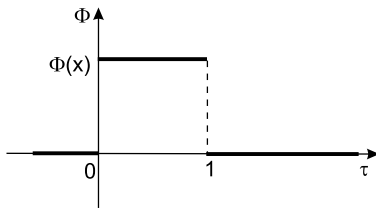
Ahora apliquemos la sugerencia: Tome $\phi(t)$ por f : $-iw\hat{\phi}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi'_{gen}(t) e^{iwt} dt$, por el teorema de la inversión tenemos

$$\begin{aligned}
\phi'_{gen}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -iw \hat{\phi}(w) e^{-iwt} dw \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -(e^{iw} - 1) e^{-itw} dw \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itw} dw - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(t-1)w} dw \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{its} ds - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t-1)s} ds \\
&= \delta(t) - \delta(t-1)
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\phi(t) = H(t) - H(t-1) + K$ donde K es una constante. Pero $K = 0$ caso contrario $\hat{\phi}(w)$ contendría un término de la forma $\tilde{K}\delta(w)$ lo cual no es cierto. En efecto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} k e^{iwx} dx = k \int_{-\infty}^{\infty} e^{iwx} dx = k 2\pi \delta(w).$$

Por lo tanto $\phi(t) = H(t) - H(t-1)$ y su gráfico es:



7. **Problema:** (M7TRFou07) Sea $k > 0$.

- (a) Calcule la TFD de $g(t) = e^{-k|t|}$.
(b) Se quiere resolver la ecuación diferencial $f''_{gen}(t) - k^2 f(t) = -\delta(t)$. Usando teoremas operacionales, hallar una ecuación equivalente para la TFD $\hat{f}(w)$.
(c) Hallar, efectivamente, una $f(t)$ particular para la ecuación de la parte b).

Solución:

- (a) a)

$$\begin{aligned}
\hat{g}(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{iwt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k|t|} e^{iwt} dt \\
&= 2 \int_0^{\infty} \cos(wt) e^{-kt} dt \\
&= \int_0^{\infty} (e^{(iw-k)t} + e^{-(iw+k)t}) dt \\
&= \frac{2k}{w^2 + k^2}
\end{aligned}$$

- (b) Si $\hat{f}(w) \leftrightarrow f(t)$ entonces $-w^2 \hat{f}(w) \leftrightarrow f''_{gen}(t)$ y por otro lado $-1 \leftrightarrow -\delta(t)$. Por lo tanto una ecuación equivalente a $f''_{gen}(t) - k^2 f(t) = -\delta(t)$ es: $-w^2 \hat{f}(w) - k^2 \hat{f}(w) = -1$ es decir:

$$w^2 \hat{f}(w) + k^2 \hat{f}(w) = 1.$$

- (c) Por b) $\hat{f}(w) = 1/(w^2 + k^2)$ y por a) $2k/(w^2 + k^2) \leftrightarrow e^{-k|t|}$ luego

$$\frac{1}{w^2 + k^2} = \frac{1}{2k} \frac{2k}{w^2 + k^2} \longleftrightarrow \frac{1}{2k} e^{-k|t|}$$

es decir, la solución de la ecuación de la parte b) es $f(t) = e^{-k|t|}/2k$.

8. **Problema:** (M7TRFou08) Usando la teoría de transformada de Fourier encuentre la función $u(x, y)$ acotada en $\{(x, y) | x > 0, y > 0\}$ y que satisface:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & x > 0, y > 0 \\ u(0, y) = 0, & y > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & x > 0 \end{cases}$$

donde $f(x)$ es la función constante 1.

Solución: Aplicamos separación de variables para encontrar las soluciones de

$$\begin{cases} \Delta v = 0, & x > 0, y > 0 \\ v(0, y) = 0, & y > 0. \end{cases}$$

Sea $v(x, y) = X(x)Y(y)$ esto nos lleva a $X''(x) + \lambda X(x) = 0$, $X(0) = 0$ y $Y''(y) - \lambda Y(y) = 0$. Cuyas soluciones acotadas son:

$$\begin{aligned} X(x) &= \sin wx, & w^2 = \lambda, & & w \in \mathbb{R} \\ Y(y) &= e^{-|w|y} & & & w \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

Así obtenemos $v(x, y) = \sin(wx)e^{-|w|y}$ con $w \in \mathbb{R}$, $x > 0$, $y > 0$. Por el principio de superposición se tiene: $u(x, y) = \int_0^\infty g(w) \sin(wx) e^{-|w|y} dw$ en donde queda por determinar $g(w)$. Pero $1 = u(x, 0) = \int_0^\infty g(w) \sin(wx) dw$ y así $g(w) = (2/\pi) \int_0^\infty 1 \cdot \sin(wx) dx$. Para resolver esta integral tenemos dos caminos.

1^{er} camino

$$\begin{aligned} g(w) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty 1 \cdot \sin(wx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^\infty H(x) \left(\frac{e^{iwx} - e^{-iwx}}{2i} \right) dx \\ &= \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^\infty (H(x) - H(-x)) e^{iwx} dx \end{aligned}$$

Si $\hat{H}(w) \leftrightarrow H(x) - H(-x)$ entonces $-iw\hat{H}(w) \leftrightarrow (H(x) - H(-x))'_{gen} = 2\delta(x)$, pero $2 \leftrightarrow 2\delta(x)$, por lo tanto: $-iw\hat{H}(w) = 2$. Así

$$g(w) = \frac{1}{i\pi} \hat{H}(w) = \frac{1}{i\pi} \left(\frac{-2}{iw} \right) = \frac{2}{\pi w}.$$

2^o camino

Buscando la extensión impar de $f(x) = 1$, $x > 0$.

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Se tiene $F'_{gen}(x) = 2\delta(x)$, tomando la TFD a ambos lados: $-iw\hat{F}(w) = 2$. Usando el hecho que $\hat{F}(w)$ es impar, se tiene:

$$\frac{-2}{iw} = \int_{-\infty}^\infty F(x) e^{iwx} dx = 2i \int_0^\infty \sin(wx) dx$$

De donde se obtiene $g(w) = 2/(\pi w)$.

Una vez encontrada $g(w)$ concluimos:

$$u(x, y) = \int_0^\infty \frac{2}{\pi w} \sin(wx) e^{-|w|y} dy.$$

9. **Problema:** (M7TRFou09) Hallar $u(x, y)$ definida y acotada en $x \geq 0$, $y \geq 0$ que cumple

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ u_x(0, y) = 0, & y > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & x > 0 \end{cases}$$

donde

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & 0 < x < \pi/2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Solución: Primero se resuelve el problema

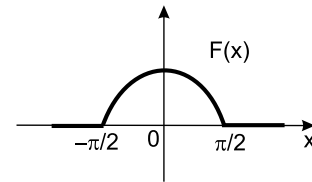
$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x > 0, y > 0 \\ u_x(0, y) = 0, & y > 0 \\ u \text{ acotada en } x > 0, y > 0 \end{cases}$$

La separación de variables nos lleva a: si $v(x, y) = X(x)Y(y)$ entonces $X''(x) + \lambda X(x) = 0$, $X'(0) = 0$ y $Y''(y) - \lambda Y(y) = 0$ cuyas soluciones son $X(x) = A \cos(wx)$ con $\lambda = w^2$, $w \in \mathbb{R}$ e $Y(y) = e^{-|w|y}$, $w \in \mathbb{R}$. Aquí se toma en cuenta que se buscan soluciones acotadas. De este modo $v(x, y) = \cos wx e^{-|w|y}$ con $w \in \mathbb{R}$, $x > 0$, $y > 0$. Por el principio de superposición se tiene:

$$u(x, y) = \int_0^\infty g(w) \cos(wx) e^{-|w|y} dw$$

Para encontrar la solución del problema con la condición inicial se procede de la manera siguiente: $f(x) = u(x, 0) = \int_0^\infty g(w) \cos wx dw$ en donde $g(w) = (2/\pi) \int_0^\infty f(x) \cos wx dx$ es la transformada de Fourier coseno de $f(x)$. Para terminar este problema hay dos maneras posibles: uno sería resolver $(2/\pi) \int_0^{\pi/2} \cos x \cos wx dx$ y substituir esta función $g(w)$ en $u(x, y) = \int_0^\infty g(w) \cos(wx) e^{-|w|y} dw$. La otra manera es el siguiente: Se toma la extensión par de $f(x)$, es decir

$$F(x) = \begin{cases} \cos x & -\pi/2 \leq x \leq \pi/2 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$



Calculando la derivada generalizada

$$\begin{aligned} F'_{gen}(x) &= \\ &= \begin{cases} -\cos x & -\pi/2 \leq x \leq \pi/2 \\ 0 & |x| > \pi/2 \end{cases} + \delta(x + \pi/2) + \delta(x - \pi/2). \end{aligned}$$

Así: $F''_{gen}(x) + F(x) = \delta(x + \frac{\pi}{2}) + \delta(x - \frac{\pi}{2})$. Tomando la TFD a ambos lados se tiene:

$$-w^2 \hat{F}(w) + \hat{F}(w) = e^{-iw\pi/2} + e^{iw\pi/2} = 2 \cos(w\pi/2)$$

de este modo $\hat{F}(w) = 2 \cos(w\pi/2) / (1-w^2)$. Luego:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}(w) e^{-iw x} dw \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}(-u) e^{iu x} du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}(w) e^{iw x} dw \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{2}{1-w^2} \cos\left(\frac{\pi w}{2}\right) \cos(wx) dw.$$

Finalmente:

$$u(x, y) = \int_0^{\infty} \frac{2 \cos wx}{\pi(1-w^2)} \cos\left(\frac{\pi w}{2}\right) e^{-|w|y} dw.$$

10. **Problema:** (XXXtrans10) Dado el siguiente problema:

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r} u_r(r, z) - u_{zz}(r, z) = 0 & 0 \leq r < 1, z > 0 \\ u_z(r, 0) = 0 & 0 \leq r < 1 \\ u(1, z) = f(z) \end{cases}$$

donde

$$f(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < z \leq 1 \\ 0 & \text{si } z > 1. \end{cases}$$

Se quiere hallar $u(r, z)$ en $0 \leq r < 1, z > 0$ solución acotada del problema. Para ello haga lo siguiente:

- Sea $u_e(r, z)$ una extensión adecuada del problema al cilindro infinito $0 \leq r < 1, z \in \mathbb{R}$ y $\hat{u}_e(r, z)$ la transformada de Fourier con respecto a la variable z de $u_e(r, z)$. Escriba la ecuación diferencial que satisface $\hat{u}_e(r, z)$.
- Halle la forma general de una solución acotada de la ecuación diferencial obtenida en la parte anterior.
- Obtenga $u(r, z)$.

Solución:

- Sea $u_e(r, z)$ la extensión par de $u(r, z)$,

$$u_e(r, z) = \begin{cases} u(r, z) & \text{si } 0 \leq r < 1, z > 0 \\ u(r, -z) & \text{si } 0 \leq r < 1, z < 0 \end{cases}$$

Nótese que

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dz}\right)_{gen} u_e(r, z) &= \begin{cases} u_z(r, z) & z > 0 \\ -u_z(r, -z) & z < 0 \end{cases} \\ \left(\frac{d^2}{dz^2}\right)_{gen} u_e(r, z) &= \begin{cases} u_{zz}(r, z) & z > 0 \\ u_{zz}(r, -z) & z < 0 \end{cases} + 0 \cdot \delta(z) \end{aligned}$$

Por lo tanto satisface la ecuación diferencial: Se desea aplicar transformada de Fourier a esta ecuación diferencial, observese:

$$\begin{aligned} \hat{u}_e(r, w) &\longleftrightarrow u_e(r, z) \\ r \frac{d^2}{dr^2} \hat{u}_e(r, w) &\longleftrightarrow r \frac{d^2}{dr^2} u_e(r, z) \\ \frac{d}{dr} \hat{u}_e(r, w) &\longleftrightarrow \frac{d}{dr} u_e(r, z) \end{aligned}$$

Por teoremas operacionales $-w^2 \hat{u}_e(r, z) \leftrightarrow \frac{d^2}{dz^2} u_e(r, z)$. Por lo tanto:

$$r \frac{d^2}{dr^2} \hat{u}_e(r, z) + \frac{d}{dr} \hat{u}_e(r, z) + w^2 r \hat{u}_e(r, z) = 0$$

donde $\hat{u}_e(r, z)$ está acotada.

- De la parte anterior se concluye que $\hat{u}_e(r, z)$ satisface la ecuación

$$\frac{d^2}{dr^2} \hat{u}_e(r, z) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \hat{u}_e(r, z) + w^2 \hat{u}_e(r, z) = 0$$

con $\hat{u}_e(r, z)$ acotada.

Separando variables $\hat{u}_e(r, z) = R(r)W(w)$ se tiene la siguiente ecuación para $R(r)$, la ecuación de Bessel de orden 0 y autovalor w^2 :

$$R''(r) + \frac{1}{r} R'(r) + w^2 R(r) = 0$$

Por lo tanto $R(r) = J_0(wr)$, así $\hat{u}_e(r, z) = J_0(wr)W(w)$, la cual es una función par.

Para $r = 1$ se tiene $\hat{u}_e(1, z) = J_0(w)W(w)$. Por otro lado

$$u_e(1, z) = f(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 \leq z \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

De donde se obtiene:

$$\hat{u}_e(1, z) = \hat{f}(w) = \int_{-1}^1 e^{i w z} dz = 2 \frac{\sin w}{w}$$

De donde: $W(w) = 2 \sin(w) / (w J_0(w))$ por lo tanto

$$\hat{u}_e(r, z) = 2 J_0(wr) \frac{\sin w}{w J_0(w)}$$

(c) Si se toma la TFI se tiene:

$$\begin{aligned} u_e(r, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2J_0(wr) \frac{\operatorname{sen} w}{wJ_0(w)} e^{-iwz} dw \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} J_0(wr) \frac{\operatorname{sen} w}{wJ_0(w)} (\cos wz - i \operatorname{sen} wz) dw \end{aligned}$$

Como $u_e(r, z)$ es una extensión par de $u(r, z)$ se puede afirmar que:

$$u(r, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} J_0(wr) \frac{\operatorname{sen} w}{wJ_0(w)} \cos wz \, dz$$

para $z > 0$ y $0 \leq r < 1$.