

MA3111, Semanas 10:

Sea $u : \hat{f}$ a \mathcal{F}_f significa la TF de f

- Halle la TF de $f(x) = \begin{cases} 1; & -a < x < a \\ 0; & \text{otro } x \end{cases}$ ($a > 0$ constante). Verifique que $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$. ¿Tenemos $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$?
- Halle la TF de $f(x) = e^{-a|x|}$ ($a > 0$ constante) usando derivadas generalizadas y reglas operacionales
- Sea $f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(\omega) = \frac{a}{\omega^2 a^2}$ ($a > 0$ constante). Halle $f(x)$
 - Calculando la integral de inversión mediante integración en el plano complejo (residuos)
 - De otra manera.
- Dado $m > 0$ entero, sea $p(x) = \begin{cases} x; & -2m\pi < x < 2m\pi \\ 0; & \text{otro } x \end{cases}$
 - Halle $f(x) = p(x) + p''_{gen}(x)$
 - Halle $g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} f(x) dx$
 - Halle $k(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} p(x) dx$ en términos de $g(\omega)$
- A partir del hecho "bien conocido". $\sqrt{k\pi} e^{x^2/2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} e^{-\omega^2/2} d\omega$ ($-\infty < x < \infty$), evalúe

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \omega^2 e^{-2\omega^2} d\omega \quad (-\infty < x < \infty)$$
- Se sabe que $e^{-|x|} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \frac{1}{1 + \omega^2} d\omega$. Halle la TF de $g(x) = x e^{-|x|} \cdot e^{-ix}$.
- Sabiendo que $i\omega \hat{\phi}(\omega) = e^{i\omega} - 1$, halle la gráfica de $\phi(x)$ (una de ellas)
- Halle la TF de $f(x) = x(1 - |x|)[h(x + 1) - h(x - 1)]$ y evalúe $\hat{f}(x)$.
- Se sabe que $f(x)$ es suave a trazos, $f(x) = 0$ para $|x| > \pi$ y $\hat{f}(\omega) = \frac{1 + \cos(\pi\omega)}{\pi(1 - \omega^2)}$ en \mathbb{R} .
 - Demuestre que $f(x)$ es función par

b) Halle una ED (en sentido distribucional) satisfecha por $f(x)$, a partir de la expresión para $\hat{f}(\omega)$, y utilizando derivadas generalizadas, las reglas operacionales y \mathcal{F}^{-1}

c) Halle $f(x)$ y dibuje su gráfica.

10. Halle la TF de $f(x) = \begin{cases} \sin x; & |x| < \pi/2 \\ 0; & |x| > \pi/2 \end{cases}$

11. Sea $L = d^2/dx^2 - k^2$ ($k > 0$ constantes). Halle todas las s.f. atemperadas de L .

12. Sea la ED $tu''(t) + (t+3)u'(t) + u(t) = 0$, $-\infty < t < \infty$.
Aplicando la TF halle una solución atemperada de ED.

13. Sea $f(x) = \frac{\sin^2 x}{x}$, $-\infty < x < \infty$. Halle $\hat{f}(\omega)$ y dibuje la gráfica de $-i\hat{f}(\omega)$.

14. De la fórmula integral $e^{-a|x|} = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{a^2 + \omega^2} d\omega$ ($a > 0$), aplicando la TF y las reglas operacionales, obtenga las "integrales divergentes".

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2 e^{i\omega x}}{a^2 + \omega^2} d\omega = 2\delta(x) - ae^{-a|x|}, \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^4 e^{i\omega x}}{a^2 + \omega^2} d\omega = a^3 e^{-a|x|} - 2a^2 \delta(x) - 2\delta''(x)$$

e interpreta el significado de estas fórmulas.

15. Sea $k(x) = e^{-|x|}$, $-\infty < x < \infty$ y sea la función de convolución $(\delta - \lambda k) * u = f$, donde $\lambda < \frac{1}{2}$ y f una distribución atemperada dada.

a) Aplique los resultados de (14.) para hallar una s.f. atemperada de $(\delta - \lambda k) *$

b) Utilice el resultado de (a) para encontrar una solución de la ecuación de convolución

c) Resuelva la ecuación para el caso que $f(x) = \delta'(x)$.

16. Sea $f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$; $-\infty < x < \infty$. Halle la TF de $f(x)$ mediante integración en el plano complejo

17. A partir de $\cos x + \cos(2x) + \dots = -\frac{1}{2} + \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n - 2n\pi)$ (ver una práctica anterior), deduzca la fórmula de Poisson.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(n) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi n), \quad \varphi \in S(\mathbb{R}).$$

18. Sea el problema (para la ecuación de ondas)

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t); & -\infty < x < \infty, \quad t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x); & -\infty < x < \infty \quad (f(x) \text{ atemperada dada}) \\ u_t(x, 0) = 0; & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

Aplicando la TF , demuestre que $u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x+ct) + f(x-ct)]$ es solución.

19. Sea el problema (para la ecuación de Laplace)

$$\begin{cases} u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0; & -\infty < x < \infty, y \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x); & -\infty < x < \infty \quad (f(x) \text{ atemperada dada}) \end{cases}$$

Aplicando la TF , halle una solución acotada $u(x, y)$ en forma de una integral de convolución

20. Sea el problema (para la ecuación de calor)

$$\begin{cases} u_t(x, t) = ku_{xx}(x, t); & -\infty < x < \infty, t \geq 0 \\ u(x, 0) = e; & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

Aplicando la TF , halle la solución $u(x, t)$

21. Sea $L = d^2/dx^2 + k^2$ ($k > 0$ constante). Aplicando la TF encuentre todas las s.f. atemperadas de L .

22. Sea

$$\begin{cases} ku_{xx}(x, t) = u_t(x, t); & 0 \leq x < \infty, t \geq 0 \\ u(0, t) = U_0; & t > 0 (U_0 > 0 \text{ constante}) \\ u(x, 0) = 0; & 0 \leq x < \infty \end{cases}$$

Aplice la TF para encontrar la solución $u(x, t)$

23. Aplicando la TF halle $u(x, y)$ acotada que satisface

$$\begin{cases} u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0, & 0 \leq x, y < \infty \\ u(0, y) = 0; & y > 0; u(x, 0) = 1; & x > 0 \end{cases}$$

24. Aplicando la TF resuelva

$$\begin{cases} u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0; & x \geq 0, 0 \leq y \leq 1 \\ u_y(x, 0) = 0; & x > 0; u_x(0, y) = 0; & 0 \leq y \leq 1 \\ u(x, 1) = \begin{cases} 1; & 0 < x < 1 \\ 0; & x > 1 \end{cases} \end{cases}$$

25. Halle la TF inversa de

a) $\hat{f}(\omega) = \frac{e^{-i\omega} - 1}{2\pi\omega^2}$

b) $\hat{f}(\omega) = \frac{1 - \cos(a\omega)}{\pi\omega^2} \quad (a > 0)$

c) $\hat{f}(\omega) = \frac{i}{\omega^2} [\text{sen}(a\omega) - a\omega] \quad (a > 0)$

d) $\omega^2 \hat{f}(\omega)$, donde $f(x) = |x|$

26. Sea $f(x)$ atemperada tal que $\hat{f}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\omega - n)$. Demuestre que $f(x)$ es periódica y que las c_n son sus coeficientes de Fourier.

27. Sea $f_n(x) = \begin{cases} 1; & -n < x < n \\ 0; & \text{otro } x \end{cases}; \quad n = 1, 2, 3, \dots$

a) Halle $\hat{f}_n(\omega)$

b) Usando el resultado de (a), demuestre que $\frac{\sin(n\omega)}{\pi\omega} \rightarrow \delta(\omega)$ (en el espacio de las distribuciones atemperadas) si $n \rightarrow \infty$

c) Determine ($k \geq 0$ entero) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n e^{i\omega t} (it)^k dt$

28. Resuelva, aplicando la TF .

$$\begin{cases} u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) + tu(x, t) = 0; & 0 \leq x < \infty, \quad t \geq 0 \\ u(x, 0) = \delta(x - a); & x > 0 \quad (a > 0 \text{ una constante}) \\ u_x(a, t) = 0; & t \geq 0 \end{cases}$$

29. Resuelva

$$\begin{cases} u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0; & -\infty < x < \infty, \quad 0 \leq y \leq 1 \\ u(x, 0) = e^{-2|x|}; & -\infty < x < \infty \\ u(x, 1) = 0; & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

30. Resuelva

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) &= 0; \quad x, y > 0 \\ u(x, 0) &= 0; \quad x \geq 0 \\ u_x(0, y) &= \begin{cases} -\sigma; & 0 \leq y \leq b \\ 0; & y > b \end{cases} \quad (\sigma, b > 0 \text{ constantes}) \end{aligned}$$

31. La distribución potencial eléctrica en un lente electrónico conduce al siguiente problema para el potencial $u(x, y)$:

$$\begin{cases} u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0; & -\infty < x < \infty, \quad -h \leq y \leq h (h > 0) \\ u(x, -h) = \begin{cases} U_1; & x < 0 \\ U_2; & x > 0 \end{cases}; & -\infty < x < \infty \\ U(x, h) = u(x, -h); & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

donde h, U_1, U_2 constantes.