

MA-3111—Tercer Parcial —

1. En el eje negativo $-\infty < x < 0$ se define

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{i}{1+x^4}.$$

Explique como definir $f(x)$ en el semieje positivo $0 < x < \infty$, de manera que la transformada de Fourier $g(\omega)$ de f tenga solamente valores reales para todo $\omega \in \mathbb{R}$

2. Se quiere encontrar una función $u(x, y)$ definida en $0 \leq x < \infty$, $0 \leq y < \infty$, que cumpla con $\Delta u = 0$, $u_x(0, y) = 0$, en $y > 0$, $u(x, 0) = f(x)$ en $x > 0$, donde $f(x)$ es una función suave a trozos que cumple con $\int_0^\infty |\int f(x)| dx < \infty$.

a) Existe una función $u(x, y)$ acotada que cumple con todo esto. Exprésela en términos de una integral. (8 pts)

b) Resuelva el problema en el caso concreto en que $f(x) = \cos(x)$ en $0 < x < \pi/2$ y $f(x) = 0$ en $\pi/2 < x < \infty$. (8 pts)

3. a) Halle $p(x) \in L'(\mathbb{R})$ que satisfaga (5 pts)

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) e^{i\omega x} dx = e^{-|\omega|}.$$

b) Aplicando los teoremas operacionales, halle $Q(x)$ que satisfaga (5 pts)

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q(x) e^{i\omega x} dx = \omega e^{i\omega} e^{-|\omega|}.$$

4. Existen constantes c_1, c_2, \dots tales que

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0(\tau_n r) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < r < 1/2; \\ 0 & \text{si } 1/2 < r < 1; \end{cases}$$

donde $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots$ son las soluciones de $J_0(\tau_n) = 0$.

a) Se pide $u(x, y, z)$ que satisfaga $\Delta u = 0$ en el cilindro semi-infinito $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 < 1, 0 < z < \infty\}$ y que cumple $u = 0$ en todo el borde, salvo en el disco $x^2 + y^2 < 1/4, z = 0$ donde $u = 1$. Escriba u , usando la fórmula dada. (6 pts)

b) Calcule, explícitamente las constantes c_n . (3 pts)