Problemario 2

Problema 1: Sea K_n una sucesión de compactos contenidos en Ω tal que $K_n \subseteq K_{n+1}$ y $\cup K_n = \Omega$. Para cada n tome $\eta_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\eta_n(x) = 1$ para todo $x \in K_n$. Dada $\phi \in \mathcal{E}(\Omega)$ pruebe que $\{\eta_n \phi\}$ es una sucesión en $\mathcal{D}(\Omega)$ que aproxima a ϕ en la topología de $\mathcal{E}(\Omega)$. Concluya que $\mathcal{D}(\Omega)$ es denso en $\mathcal{E}(\Omega)$.

Problema 2: Sea $\Omega = (0, \infty)$. Para $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ defina $T\phi = \sum D^m \phi(1/m)$. Pruebe que T es una distribución de orden infinito en Ω y que no puede extenderse a todo $\mathbb{R}$.

Problema 3: Sean K un compacto, V y Ω dos abiertos tales que $K \subset V \subset \Omega$. Considere $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ con $\operatorname{sop}(T) \subset K$ y suponga que la sucesión $\{\phi_n\} \in \mathcal{D}(\Omega)$ satisface

$$\lim_{n\to\infty} \left[\sup_{x \in V} |D^\alpha \phi_n(x)| \right] = 0 \tag{1}$$

para cada multi-índice α.

(1) Pruebe que $\lim\limits_{n\to\infty} T\phi_n = 0$.

(2) Pruebe también que si $K = \overline{B}(0,1)$ se puede cambiar V por K en (1).

(3) Encuentre otros conjuntos para los cuales esto es cierto.

(4) Finalmente demuestre que en general esto no es posible. Proponemos el siguiente contraejemplo: Tome una sucesión positiva y estrictamente decreciente $\{c_n\} \in \ell^1$ y defina (verifique) $T\phi = \sum [\phi(c_j) - \phi(0)]$. Tome una sucesión $\{\phi_n\}$ de funciones tales que $\phi_n(x) = 0$ si $x < c_{n+1}$ y $\phi(x) = 1/n$ si $c_n \leq x \leq c_1$.

Problema 4: Sean $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ y $K = [0,1]^N$. Pruebe que existen una función continua f y un multi-índice α tales que $T\phi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f(x) D^\alpha \phi(x)\, dx$ para toda $\phi \in \mathcal{D}_K$. Para ello:

(1) Defina $T = \partial_{x_1} \partial_{x_2} \ldots \partial_{x_N}$ y verifique que $\psi(y) = \int_{Q(y)} T\psi(x)\, dx$ para un conjunto $Q(y)$ apropiado y toda $\psi \in \mathcal{D}_K$.

(2) Usando el Teorema del Valor Medio compruebe que $\rho_{K,n}(\psi) \leq \int_K |T^{n+1}\psi(x)|\, dx$ para toda $\psi \in \mathcal{D}_K$ y cualquier $n \in \mathbb{N}$.

(3) Encuentre una constante C y un natural M tales que $|T\phi| \leq C \int_K T^{M+1}\phi(x)|\, dx$ para toda $\psi \in \mathcal{D}_K$.

(4) Sea Y la imagen de T^{M+1}. Compruebe que se puede definir $\Lambda : Y \to \mathbb{C}$ mediante $\Lambda T^{M+1}\phi = T\phi$ y pruebe que $|\Lambda\psi| \leq C \int_K |\psi(x)|\, dx = C\|\psi\|_{L^1(K)}$ para toda $\psi \in Y$.

(5) El Teorema de Hahn-Banach garantiza la existencia de una extensión continua a $L^1(K)$. Explique la naturaleza de esta extensión, que denotaremos g. En particular, compruebe que tiene sentido escribir $T\phi = \int_K g(x) T^{M+1}\phi(x)\, dx$ para $\phi \in \mathcal{D}_K$.

(6) Concluya.

(7) Explique brevemente cómo este resultado se extiende a cualquier compacto K.

Problema 5: Sea $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

(1) Pruebe que si $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ entonces existen funciones continuas f_α (un número finito de ellas) tales que $T = \sum_\alpha D^\alpha T_{f_\alpha}$.

(2) Pruebe que para cada multi-índice α existe una función continua g_α de manera que:
   (a) Cada compacto intersecta los soportes de una cantidad finita de g_α's; y
   (b) $T = \sum_\alpha D^\alpha T_{g_\alpha}$.

   Sug: Puede ser útil usar particiones de la unidad.