Problemario 3

Problema 1: Enuncie y demuestre la identidad de Parseval para series de Fourier de *funciones*. Encuentre condiciones para la convergencia puntual.

Problema 2: Sea $T > 0$. Denotamos por $\omega = 2\pi/T$. Sea E_n la distribución asociada a la función $e_n(t) = e^{in\omega t}$. Considere las distribuciones T-periódicas $F = \sum a_n E_n$ y $G = \sum b_n E_n$, definidas mediante sus series de Fourier. Diga lo que pueda sobre la serie $\sum a_n b_n E_n$ y su relación con F y G.

Problema 3: Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad -1 \leq x < 0 \\ a(1-x) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

Calcule los coeficientes de Fourier de f utilizando $D^2 T_f$. Estudie la sumabilidad de dichos coeficientes según el valor de $a > 0$.

Problema 4: Considere la extensión 2π-periódica de la función

$$g_a(x) = \begin{cases} (x+\pi)/(\pi - a) & \text{si} \quad -\pi \leq x \leq -a \\ x/a & \text{si} \quad -1 \leq -a \leq x \leq a \\ (\pi - x)/(\pi - a) & \text{si} \quad a \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

Calcule la segunda derivada de la distribución T_{g_a} y utilícela para determinar su serie de Fourier. Escriba el caso particular $a = \pi/2$. Deduzca el valor de $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(2n+1)^2}$. Justifique.

Problema 5: Considere la función $h(x) = x/2$ en $(-\pi, \pi]$ y extiéndala periódicamente a todo $\mathbb{R}$. Determine su serie de Fourier y utilícela para calcular $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2}$. Justifique.

Problema 6: Evalúe $\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ikx}$ en el sentido de distribuciones. Determine el orden de la distribución límite. Sugerencia: Puede ser útil considerar distribución asociada a la extensión periódica de la función $F(x) = x(2\pi - x)$, $x \in [0, 2\pi]$ a todo $\mathbb{R}$.

Problema 7: Enuncie y demuestre la Fórmula de Poisson. Utilícela para evaluar $\sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{m^2+a^2}$, con $a > 0$.

Problema 8: Investigue acerca del *Fenómeno de Gibbs* y ilústrelo numéricamente graficando las sumas parciales de Fourier de la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in [2n, 2n+1] \\ 0 & \text{si} \quad x \in (2n+1, 2n+2). \end{cases}$$