MA46B ECUACIONES DE LA FÍSICA-MATEMÁTICA

JUAN PEYPOUQUET

Problemario I

1. Considere la siguiente función:

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}} & \text{si} \quad |x| < 1 \\ 0 & \text{si} \quad |x| \geq 1. \end{cases}$$

(1) Pruebe que $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^N)$ con $\mathrm{sop}(\phi) = \overline{B}(0,1)$.
(2) Sea $c = \int_{\mathbf{R}^N} \phi(x)\, dx$. Para $\varepsilon \in (0,1]$ defina $\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{c\varepsilon^N}\phi(\frac{x}{\varepsilon})$. Verifique lo siguiente:
   i) $\int_{\mathbf{R}^N} \rho_\varepsilon(x)\, dx = 1$;
   ii) $\mathrm{sop}(\rho_\varepsilon) = \overline{B}(0,\varepsilon)$; y
   iii) $\rho_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^N)$.

Una familia que satisface i), ii) y iii) es una *familia regularizante*.

2. Sean $K \subset \mathbf{R}^N$ un compacto y $\varepsilon > 0$. Defina $K_\varepsilon = \{x \in \mathbf{R}^N \mid d(x,K) \leq \varepsilon/3\ \}$ y $U_\varepsilon = \{x \in \mathbf{R}^N \mid d(x,K) \geq 2\varepsilon/3\ \}$. Verifique que la función

$$v_\varepsilon(x) = \frac{d(x,U_\varepsilon)}{d(x,U_\varepsilon) + d(x,K_\varepsilon)}$$

es continua y satisface

$$v_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in K_\varepsilon \\ 0 & \text{si} \quad x \in U_\varepsilon. \end{cases}$$

3. Pruebe que en general no es cierto que $D^\alpha T_f = T_{D^\alpha f}$.

4. Calcule el orden y la derivada de $VP(\frac{1}{x})$.

5. Demuestre la fórmula de Leibnitz: Para $f, g \in \mathcal{C}^\infty$ se tiene que

$$D^\alpha(fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha,\beta}(D^{\alpha-\beta} f) D^\beta g),$$

donde $\beta \leq \alpha$ significa $\beta_i \leq \alpha_i$ para $i = 1, \ldots, N$ y $\alpha - \beta = (\alpha_1 - \beta_1,\ \ldots,\ \alpha_N - \beta_N)$. Calcule explícitamente las constantes $c_{\alpha,\beta}$ y verifique que la fórmula también es válida si se cambia $g \in \mathcal{C}^\infty$ por $T \in \mathcal{D}'$.

6. Construya una topología en

$$\mathcal{C}_0^m(\Omega) = \{\ \phi \in \mathcal{C}^m(\Omega) \mid \mathrm{sop}(\phi)\ \text{ es compacto }\}$$

a partir de los espacios $\mathcal{D}_K^m(\Omega)$ al igual que se hizo en cátedra con $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ a partir de $\mathcal{D}_K(\Omega)$. Estudie las propiedades topológicas de dicho espacio. Acepte que $\mathcal{D}(\Omega)$ es denso en $\mathcal{D}^m(\Omega)$ para esta topología y demuestre que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ es de orden menor o igual que m si, y sólo si, T se puede extender de manera continua a $\mathcal{D}^m(\Omega)$. Esto último quiere decir, más precisamente, que existe un elemento T_m del dual de $\mathcal{D}^m(\Omega)$ tal que $\langle T, \phi\rangle = \langle T_m, \phi\rangle$ para toda $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

7. Calcule el orden y la derivada de $Pf(x_+^\lambda)$. Estudie por separado los casos en que $\mathrm{Re}(-\lambda)$ pertenece o no a $\mathbf{N}^*$.

8. Calcule, en el sentido de distribuciones, el laplaciano de la función $\rho(r) = \log(r)$ en $\mathbf{R}^2$.

9. Considere $\{g_n\} \subset \mathcal{E}(\Omega)$ y $\{T_n\} \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Pruebe que si $g_n \to g$ y $T_n \to T$ en las topologías de $\mathcal{E}(\Omega)$ y $\mathcal{D}'(\Omega)$, respectivamente, entonces $g_n T_n \to gT$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$.

10. Dados $x, y \in \mathbf{R}$ y $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ defina $\tau_x\phi(y) = \phi(y - x)$. Análogamente, para $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$, defina la distribución $\tau_x T$ mediante $\langle \tau_x T, \phi\rangle = \langle T, \tau_{-x}\phi\rangle$. Demuestre que $\frac{1}{x}(T - \tau_x T)$ converge a DT en $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ cuando $x \to 0$.