MA46B ECUACIONES DE LA FÍSICA-MATEMÁTICA

JUAN PEYPOUQUET

Trabajo Grupal I

Para entregar en grupos de 2, 3 ó 4 personas el miércoles 1 de agosto en la secretaría docente de matemática.

1. Sea $\Omega \subseteq \mathbf{R}^N$ un dominio. Construya explícitamente una sucesión $\{K_n\}$ de compactos de Ω tal que

$$\bigcup_{n\in\mathbf{N}} K_n = \Omega.$$

2. Defina el espacio topológico $\mathcal{E}(\Omega)$ como el conjunto de las funciones de clase $\mathcal{C}^\infty$ en Ω con la métrica (pruebe que lo es) dada por

$$d(f,g) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{\rho_{K,m}(f-g)}{1+\rho_{K,m}(f-g)}$$

y demuestre que es completo. Pruebe también que $f_n \to f$ en $\mathcal{E}(\Omega)$ si, y sólo si, $\partial^\alpha f_n$ converge a $\partial^\alpha f$ uniformemente en cada compacto de Ω para cada multi-índice $\alpha \in \mathbf{N}^N$.

3. Pruebe que $\mathcal{E}(\Omega)$ tiene la propiedad de Heine-Borel.

4. Verifique que el subespacio $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ de las funciones en $\mathcal{E}(\Omega)$ que tienen soporte compacto no es completo con la topología traza heredada de $\mathcal{E}(\Omega)$. Sugerencia: Tome $\Omega = \mathbf{R}$ y escoja $f \in \mathcal{C}_{[0,1]}^\infty(\Omega)$ que sea positiva en $(0,1)$ y defina

$$f_n(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} f(x-j).$$

5. Compruebe que la inclusión de $\mathcal{D}(\Omega)$ (con la topología estudiada en clase) en $\mathcal{E}(\Omega)$ (con la topología definida arriba) es continua.

Nota: Se puede demostrar que $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ es denso en $\mathcal{E}(\Omega)$. Lo haremos más adelante.