

Tarea 1 MA44C

Septiembre de 2007

Ejercicios

- a) Sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una cadena de Markov homogénea con matriz de transición P y distribución inicial μ . Sea $N \in \mathbb{N}$ fijo.

Pruebe que condicionalmente al evento $\{X_N = i\}$, $(X_n)_{n=0}^N$ es una cadena de Markov no homogénea, y encuentre sus probabilidades de transición en función de μ y P .

Nota: en el caso en $\mu = \delta_i$ decimos que la nueva cadena es un "puente de una cadena de Markov" (X_n) .

- b) Sean $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ v.a. i.i.d. tales que $\mathbb{P}(Y_n = 2) = \frac{1}{2}$ y $\mathbb{P}(Y_n = -1) = \frac{1}{2}$. Se definen $X_0 = 1$, $X_n = X_0 + Y_1 + \dots + Y_n$ y

$$T_0 = \inf\{n \geq 0 : X_n = 0\} \leq \infty.$$

- i) Para $s \in]-1, 1[$ sea $\phi(s) := \mathbb{E}(s^{T_0})$. Pruebe que

$$s\phi^3(s) - 2\phi(s) + s = 0.$$

- ii) Deduzca que (X_n) es transiente.

- c) Sea (X_n) cadena de Markov homogénea no necesariamente irreducible y j un estado transiente. Pruebe que para toda distribución inicial μ ,

$$\mathbb{P}_\mu(X_n = j) \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

- d) Sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cadena de Markov a valores en E , E' otro conjunto numerable y $f : E \rightarrow E'$ medible. Dar un ejemplo en que $Y_n = f(X_n)$ NO es cadena de Markov, y una condición suficiente sobre f para que Y_n sí lo sea.

Problema I "Reversibilidad, balance detallado y paseos en grafos"

Recuerdo: Se probó en clase auxiliar que si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es CMH con matriz de transición P y distribución inicial μ y $N \in \mathbb{N}$ es fijo, entonces

- i) $(Y_n)_{0 \leq n \leq N}$ definida por $Y_n = X_{N-n}$ es una cadena de Markov, no-homogénea.

- ii) Si μ es invariante, entonces $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es homogénea, con probabilidades de transición $\hat{p}_{ij}$ dadas por la relación

$$\mu_i \hat{p}_{ij} = \mu_j p_{ji}$$

para todo $i, j \in I$.

Definición 1 Diremos que una cadena de Markov (X_n) es *reversible* si para cada $N \in \mathbb{N}$ las cadenas $(X_n)_{0 \leq n \leq N}$ y $(X_{N-n})_{0 \leq n \leq N}$ tienen la misma ley.

Definición 2 Sea λ una medida sobre I (es decir, $0 \leq \lambda_i < \infty$ para todo $i \in I$). Diremos que λ está en *balance detallado* con P si para todo $i, j \in I$

$$\lambda_i p_{ij} = \lambda_j p_{ji}$$

a) a.i) Pruebe que si λ está en balance detallado con P , entonces λ es una medida invariante para P . Muestre que la recíproca no es cierta.

a.ii) Muestre que (X_n) es reversible ssi μ está en balance detallado con P .

Obs: en general, *buscar una solución λ de la ecuación de balance detallado es más fácil que buscar una solución λ de la ecuación $\lambda = \lambda P$* ...

Definición 3 Un grafo $G = (V, E)$ es un conjunto numerable V (llamado conjunto de “vértices”), dotado de una relación simétrica $E \subseteq V \times V$ (“conjunto de arcos”). Si $(x, y) \in E$, decimos que “ x e y son vecinos” y escribimos $x \sim y$. Supondremos que para todo $x \in V$, el “grado” de x , definido como $gr(x) := |\{y \in V : x \sim y\}|$, es finito, y que para todo $x \in V$, $x \not\sim x$.

Definición 4 Se define el *paseo aleatorio simple en G* como una cadena de Markov homogénea $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a valores en V y con probabilidades de transición

$$p_{xy} = \begin{cases} \frac{1}{gr(x)} & \text{si } x \sim y \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

b) b.i) Suponga que V es finito y que G es “conexo”, es decir, que para cada par $x, y \in V$ hay al menos un camino de arcos que conecta x con y . Muestre que $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una única distribución invariante π . Calcule explícitamente π , y pruebe que el paseo $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ partiendo con ley π es reversible.

b.ii) Si G es una pirámide de base cuadrada, calcule el tiempo esperado de retorno a la cumbre, y el tiempo esperado de retorno a un vértice de la base.

Problema II Sea (X_n) CMH irreducible en E y $F \subseteq E$ un conjunto finito. Sea $\tau(F) := \inf\{n \geq 1 : X_n \in F\}$ y suponga que $\mathbb{E}_j(\tau(F)) < \infty$ para todo $j \in F$. Se probará que la cadena es recurrente positiva.

i) Considere $\tau_1 = \tau(F), \tau_2, \tau_3, \dots$ los instantes de sucesivos retornos a F y un estado $i \in F$. Se probó en clase auxiliar que (Y_n) definida por $Y_0 = X_0 = i, Y_n := X_{\tau_n}, n \geq 1$ es una cadena de Markov homogénea a valores en F . Explique porqué en el presente caso, (Y_n) es irreducible y recurrente positiva.

ii) Sean respectivamente T_i y $\tilde{T}_i$ los tiempos de retorno a i para (X_n) y para (Y_n) . Defina $S_0 = \tau_1$ y $S_k = \tau_{k+1} - \tau_k$ para $k \geq 1$. Muestre que

$$\mathbb{E}_i(T_i) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}_i(S_k \mathbf{1}_{\{k < \tilde{T}_i\}})$$

y que

$$\mathbb{E}_i(S_k \mathbf{1}_{\{k < \tilde{T}_i\}}) = \sum_{l \in F} \mathbb{E}_l(\tau(F)) \mathbb{P}_i(k < \tilde{T}_i, X_{\tau_k} = l)$$

ii) Concluya el resultado.

Problema III “Convergencia geométrica al equilibrio en cadenas de Markov finitas”

En lo que sigue, supondremos que el conjunto I es *finito*, y que P es matriz estocástica irreducible y aperiódica.

El objetivo de este problema es probar que la convergencia de las probabilidades de transición $\mathbb{P}_\mu\{X_n = j\}$, cuando $n \rightarrow \infty$, tiene lugar a una tasa geométrica, y uniformemente en la condición inicial. Es decir, que existen $C > 0$ y $\alpha \in]0, 1[$ tales que para toda distribución inicial μ y todo $j \in I$ se tiene

$$|\mathbb{P}_\mu\{X_n = j\} - \pi_j| \leq C\alpha^n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, donde π es la única distribución invariante para P .

i) Pruebe que existen $N \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$ tales que $p_{ij}^{(n)} \geq \varepsilon$ para todo $n \geq N$ y todo $i, j \in I$.

ii) Considere $(X'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una cadena de Markov con ley $\mathbb{P}_\pi$ ($(X'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ está “en equilibrio”).

Explique brevemente porqué existe en cierto espacio de probabilidad un “coupling” $(X_n, X'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(X'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ independientes. Asumiremos que $(X_n, X'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ está definido en este espacio y denotamos por $\mathbb{P}_{\mu \otimes \pi}$ su ley conjunta.

Se define $T := \inf\{n \geq 0 : X_n = X'_n\}$. Muestre que T es tiempo de parada con respecto a la filtración natural de $(X_n, X'_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

iii) Pruebe que para todo $(i, i') \in I^2$ se tiene

$$\mathbb{P}_{(i, i')}\{X_N \neq X'_N\} \leq (1 - \varepsilon^2|I|)$$

y deduzca que

$$\mathbb{P}_{\mu \otimes \pi}\{T > nN\} \leq (1 - |I|\varepsilon^2)^n$$

iv) Pruebe que

$$|\mathbb{P}_\mu\{X_n = j\} - \pi_j| \leq \mathbb{P}_{\mu \otimes \pi}\{X_n \neq X'_n\} \leq \mathbb{P}_{\mu \otimes \pi}\{T > n\}$$

y concluya el resultado.

Problema IV La estrategia de autoorganización por “Move-to-the-front”

Considere N archivos $S_1, \dots, S_n$ dispuestos en una lista en la memoria de un computador. A cada instante (discreto) $n \in \mathbb{N}$ uno de los N archivos es requerido independientemente de todo lo demás, y al instante siguiente se deja a la cabeza de la lista.

Denotamos por $X_n = (S_{i_1}, \dots, S_{i_N})$ el estado de la lista al tiempo n , es decir, S_{i_1} es el primer archivo de la lista, S_{i_2} el segundo y así sucesivamente.

Suponga que en cada instante la probabilidad de que el archivo solicitado sea S_j es $\alpha_j > 0$. Pruebe que (X_n) es una cadena de Markov irreducible recurrente positiva con distribución estacionaria dada por

$$\pi(S_{i_1}, \dots, S_{i_N}) = C\alpha_{i_1}^N \alpha_{i_2}^{N-1} \dots \alpha_{i_N}$$

con $C > 0$ una constante de normalización. Cómo se puede interpretar el régimen estacionario?