

Procesos Puntuales de Poisson y Aplicaciones

Joaquín Fontbona

VI Escuela de Primavera DIM, 2006

1 Introducción

El objetivo de este curso es presentar una introducción a los llamados "Procesos Puntuales de Poisson" los que constituyen una poderosa herramienta de probabilidades para tratar matemáticamente la idea de "puntos distribuidos de manera aleatoria" y "sin un orden aparente" en el espacio (que puede ser físico o abstracto). Esto puede corresponder por ejemplo: a la ubicación de las estrellas en una porción del cielo, a la distribución del mineral en el suelo en una mina, a los momentos y tipos de mutaciones que se producen en el material genético de una especie, o también a los instantes del año en que una compañía de seguros debe responder ante un siniestro y los montos respectivos.

Los procesos puntuales de Poisson, también llamados "medidas puntuales de Poisson", tienen una amplísima gama de aplicaciones, por ejemplo, en el estudio de redes de tráfico e informáticas, en teoría de colas, y en diversas áreas de procesos estocásticos. Además, permiten realizar una gran variedad de cálculos explícitamente, y conocer la ley de diversos funcionales de los "puntos aleatorios".

Como requisito para este curso se necesitan nociones básicas de la teoría de probabilidades y algunas de teoría de la medida. En la primera clase se recordarán algunos conceptos importantes de la teoría de probabilidades que serán usadas durante el curso. Además se estudiará la llamada "ley de Poisson", y se discutirá porque ella aparece de manera natural cuando, dada una cantidad muy grande de objetos independientes, se observan eventos asociados a ellos, que tienen probabilidad "muy baja" de ocurrir para cada objeto individual.

Se estudiarán también algunos aspectos el Proceso de Poisson en $\mathbb{R}_+$, objeto muy utilizado en la modelación de redes telefónicas y teoría de colas, y que muestra algunos (pero no todos los) aspectos importantes de las medidas puntuales de Poisson generales.

En la segunda clase se definirá un proceso puntual de Poisson en un espacio general. Se estudiarán propiedades de este proceso estocástico, y cómo caracterizarlo entre los procesos de conjuntos aleatorios de puntos. Además se estudiarán algunas "operaciones" que a partir de medidas puntuales de Poisson dadas generan nuevas.

En la sesión de trabajo, y en la tercera clase de presentarán algunas aplicaciones de procesos puntuales de Poisson como por ejemplo en teoría de colas, en geometría estocástica y otras áreas de procesos estocásticos.

2 Preliminares

En esta sección recordamos sin demostración algunos resultados básicos y nociones de la teoría de Probabilidades, que serán usados en las partes siguientes.

2.1 Variables aleatorias e independencia.

- Un espacio de probabilidad es un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. Un conjunto medible $A \in \mathcal{F}$ se denomina evento. Diremos que el evento A ocurre **casi seguramente** (c.s. en abreviado) si $\mathbb{P}(A) = 1$.

- Dado un evento $A \in \mathcal{F}$ con $\mathbb{P}(A) > 0$, la **Probabilidad condicional dada el evento** A es la medida de probabilidad $\mathbb{P}(\cdot|A)$ definida en $\mathcal{F}$ por $\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$.
- Si (S, Σ) es un espacio medible, una función medible $X : \Omega \rightarrow S$ se denominará **variable aleatoria** (**v. a.** en abreviado) a valores en S . Si $(S, \Sigma) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (con $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu Boreliana), y la integral de X c/r a $\mathbb{P}$ está definida, esta se denotará $\mathbb{E}(X)$.
- En un espacio medible general (S, Σ, μ) , la integral de una función medible $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ se denotará (cuando exista) $\int_S f(x) \mu(dx)$.
- La ley de una v.a. X a valores en (S, Σ) es la medidad de probabilidad μ_X definida por $\mu_X(A) = P \circ X^{-1}(A) = P(X \in A)$ para todo $A \in \Sigma$. Si $f : (S, \Sigma) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ es medible se tiene $\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \mu_X(dx) = E(f(X))$ cuando ambas integrales están definidas.
- Dos v.a. $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (S_1, \Sigma_1)$ e $Y : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (S_2, \Sigma_2)$ son independientes si para todo $A \in \Sigma_1$ y $B \in \Sigma_2$,

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A) \mathbb{P}(Y \in B).$$

De manera equivalente $\mathbb{P}(X \in A | Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)$.

- Una familia de variables aleatorias $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $X_n : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (S_n, \Sigma_n)$ (tomado valores en espacios cualesquiera) se dice **independiente** si para todo subconjunto finito $\{t_1, \dots, t_m\} \subseteq \mathbb{N}$ y conjuntos medibles $A_1 \in \Sigma_{t_1}, \dots, A_m \in \Sigma_{t_m}$ se tiene

$$\mathbb{P}(X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_m} \in A_m) = \prod_{i=1}^m \mathbb{P}(X_{t_i} \in A_i)$$

Esto es equivalente a que para funciones reales $f_1, \dots, f_m$ medibles (definidas en los espacios que corresponden) se tiene

$$\mathbb{E}(f(X_{t_1}) \dots f(X_{t_m})) = \prod_{i=1}^m \mathbb{E}(f(X_{t_i})),$$

o bien, a que

$$\mu_{(X_{t_1}, \dots, X_{t_m})}(dx_1, \dots, dx_m) = \mu_{X_{t_1}}(dx_1) \otimes \dots \otimes \mu_{X_{t_m}}(dx_m).$$

donde $\otimes$ denota el producto de medidas en el espacio producto.

- Una sucesión de v.a. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ independientes a valores en el mismo espacio se dicen **independientes e idénticamente distribuidas** con ley μ si para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mu_{X_n} = \mu$.
- Si $X, Y : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ son v.a. independientes, entonces $\mu_{X+Y} = \mu_X * \mu_Y$ es la convolución de las dos leyes.

(Recordar que si μ, ν son medidas de probabilidad en $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, su convolución $\mu * \nu$ es la medida definida por $\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \mu * \nu(dx) = \int_{\mathbb{R}^{2d}} f(x+y) \mu \otimes \nu(dx, dy)$.)

2.2 Función característica y transformada de Laplace.

Denotamos por $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ el espacio de medidas de probabilidad en $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ y por $\mathcal{P}(\mathbb{R}_+)$ el espacio de medidas de probabilidad en $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$

La **transformada de Fourier o Función característica** de $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ es la función $\hat{\mu}(\xi) : \mathbb{R}^d \rightarrow \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ definida por

$$\hat{\mu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \xi, x \rangle} \mu(dx)$$

o de manera equivalente, si $X \sim \mu$, entonces

$$\hat{\mu}(\xi) = \mathbb{E}(e^{i\langle \xi, X \rangle}).$$

Las siguientes son propiedades fundamentales:

- $\hat{\mu}$ es una función continua.
- ”**Inyectividad**” Dadas $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ se tiene $\mu = \nu$ ssi $\hat{\mu}(\xi) = \hat{\nu}(\xi)$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^d$.
- $X_1, \dots, X_m$ v.a. respectivamente a valores en $\mathbb{R}^{d_1}, \dots, \mathbb{R}^{d_m}$, son independientes ssi

$$\hat{\mu}_{(X_1, \dots, X_m)}(\xi_1, \dots, \xi_m) = \prod_{j=1}^m \hat{\mu}_{X_j}(\xi_j)$$

para todo $\xi_j \in \mathbb{R}^{d_j}$.

- Si $Y_1, \dots, Y_m$ a valores en $\mathbb{R}^d$ son independientes entonces

$$\hat{\mu}_{Y_1 + \dots + Y_m}(\xi) = \prod_{j=1}^m \hat{\mu}_{Y_j}(\xi)$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^d$. (Esto es consecuencia del hecho que $\widehat{\mu * \nu}(\xi) = \hat{\mu}(\xi)\hat{\nu}(\xi)$.)

La **transformada de Laplace** de $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}_+)$ es la función $\hat{\mu}(u) : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$L_\mu(u) = \int_0^\infty e^{-ux} \mu(dx)$$

o bien, si $X \sim \mu$,

$$L_\mu(u) = \mathbb{E}(e^{-uX}).$$

- La transformada de Laplace satisface exactamente las mismas propiedades que la función característica (continuidad, ”inyectividad”) si todas las variables aleatorias involucradas son a valores en $\mathbb{R}_+$.
- Además permite trabajar con v.a. X que tomen valores en $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, donde por convención se toma $e^{-\infty} = 0$. Notamos que cuando $u \rightarrow 0$ se tiene $e^{-uX} \rightarrow \mathbf{1}_{\{X < \infty\}}$ c.s. . Luego

$$L_{\mu_X}(u) = \mathbb{E}(e^{-uX}) \rightarrow \mathbb{P}(X < \infty) \quad \text{para } u \rightarrow 0.$$

2.3 Algunas variables aleatorias clásicas

Definición 2.1 Sea $n \in \mathbb{N}$ y $p \in (0, 1)$. Una v.a. $\mathbf{b}$ a valores en $\{1 \dots n\}$ sigue una ley binomial de parámetros n y p si $\mathbb{P}(\mathbf{b} = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{(n-k)}$. Denotamos $\mathbf{b} \sim B(n, p)$.

Ejercicio: Se tiene $\mathbb{E}(\mathbf{b}) = np$.

La generalización natural de la ley binomial es la siguiente:

Definición 2.2 Sean $n, m \in \mathbb{N}$ y $p_1, \dots, p_m \in (0, 1)$ con $p_1 + \dots + p_m = 1$. Una v.a. $\mathbf{M}$ a valores en $\{1 \dots n\}^m$ tiene ley multinomial de parámetros $(n; p_1, \dots, p_m)$ si

$$\mathbb{P}(\mathbf{M} = (n_1, \dots, n_m)) = \frac{n!}{n_1! \dots n_m!} p_1^{n_1} \dots p_m^{n_m}$$

si $n_1 + \dots + n_m = n$, y $\mathbb{P}(\mathbf{M} = (n_1, \dots, n_m)) = 0$ si no. Lo denotamos $\mathbf{M} \sim \mathcal{M}(n; p_1, \dots, p_m)$

Básicamente, la multinomial es la ley del experimento "tirar n veces un dado" (no necesariamente equilibrado):

Ejercicio: Si $(Y_i)_{i=1}^n$ son variables aleatorias i.i.d que toman $m \in \mathbb{N}$ posibles valores, cada uno con probabilidad p_i , probar que $\mathcal{M}(n; p_1, \dots, p_m)$ es la ley del número de veces (en un total de n) que se obtiene cada uno de los m valores.

Definición 2.3 Una v.a. real X tiene **ley exponencial de parámetro** $\lambda \in]0, \infty[$ si $\forall t \geq 0$ se tiene $P(X > t) = e^{-\lambda t}$. Lo denotamos $X \sim \mathbf{e}(\lambda)$. (Notar que X es c.s. estrictamente positiva.)

También consideraremos como v.a. exponenciales los casos "límite" $\lambda = 0$, con $X \sim \mathbf{e}(0)$ ssi $X = \infty$ c.s., y $\lambda = \infty$, con $X \sim \mathbf{e}(0)$ ssi $X = 0$ c.s.

Las siguientes propiedades se verifican fácilmente:

Lema 2.1 a) Para $\lambda \in]0, \infty[$, $\mathbf{e}(\lambda)$ tiene densidad $\lambda e^{-\lambda x} dx \mathbf{1}_{[0, \infty[}$.

b)

$$L_{\mathbf{e}(\lambda)}(u) = \frac{\lambda}{\lambda + u}$$

c)

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \text{ y } Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Proposición 2.1 Sea X v.a. a valores en $]0, \infty[$. Entonces X es una v.a. exponencial ssi para todo $t, s \geq 0$,

$$\mathbb{P}(X > t + s | X > s) = \mathbb{P}(X > t).$$

Demostración Que la condición es necesaria es directo de la definición de una v.a. exponencial. Recíprocamente, si la condición se cumple tenemos que $\mathbb{P}(X > t + s) = \mathbb{P}(X > s) \mathbb{P}(X > t)$, es decir $g(s) = \log \mathbb{P}(X > s)$ es una función aditiva. Es estandar deducir de aquí que g es lineal en $\mathbb{Q}$. Por otro lado, por continuidad inferior de la medida, $g(t)$ es continua a la derecha, luego es lineal en $\mathbb{R}$. Se concluye de esto que $X \sim \mathbf{e}(\lambda)$, con $\lambda = -\ln \mathbb{P}(X > 1)$. $\square$

La propiedad anterior también se conoce como "perdida de memoria" de la v.a. exponencial.

La siguiente ley aparece como generalización de la exponencial:

Definición 2.4 Sean $\lambda, \alpha \in]0, \infty[$. Una v.a. X tiene ley **Gamma de parámetros** (λ, α) , y lo denotamos $X \sim \text{Gamma}(\lambda, \alpha)$ si tiene la densidad

$$\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{[0, \infty[}(x) dx.$$

donde $\alpha \mapsto \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ es la función Gamma.

Por inducción e integración por partes se verifica para $\alpha = n \in \mathbb{N}$ que $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Lema 2.2 a) Se tiene

$$L_{\text{Gamma}(\lambda, \alpha)}(u) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + u} \right)^\alpha$$

b) Si $S_1, \dots, S_m$ son v.a. i.i.d de ley $\mathbf{e}(\lambda)$ entonces

$$S_1 + \dots + S_m \sim \text{Gamma}(\lambda, m)$$

Demostración La primera afirmación se obtiene de

$$L_{\text{Gamma}(\lambda, \alpha)}(u) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-x(\lambda+u)} x^{\alpha-1} dx$$

haciendo el cambio de variable $y = (\lambda+u)x$. La segunda es consecuencia de la propiedad de transformada de Laplace de sumas de v.a. independientes: $L_{S_1+\dots+S_m}(u) = (L_{S_1})^m(u) = \left(\frac{\lambda}{\lambda+u} \right)^m = L_{\text{Gamma}(\lambda, m)}(u)$. $\square$

2.4 Distribución de Poisson

Con un cálculo sencillo se demuestra el resultado conocido como **límite de Poisson**:

Proposición 2.2 (Poisson, 1837). Sean $\lambda \in]0, \infty[$, y $p_n \in]0, 1[$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $np_n \rightarrow \lambda$ cuando $n \rightarrow \infty$. Sea $\mathbf{b}_n \sim B(n; p_n)$ una variable binomial. Entonces para todo $k \in \mathbb{N}$, cuando $n \rightarrow \infty$,

$$\mathbb{P}(\mathbf{b}_n = k) \rightarrow e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

En palabras, supongamos que efectuamos una cantidad muy grande de veces $n \rightarrow \infty$ un mismo experimento con dos resultados posibles, independientemente cada vez (ej: tirar una moneda cargada). Supongamos además que en cada uno de los experimentos, la probabilidad p_n de obtener resultado positivo es muy baja, y más precisamente, que es "inversamente proporcional" a n . (Notar que esto corresponde a pedir que el número promedio de resultados positivos $\mathbb{E}(\mathbf{b}_n) = np_n$ sea del orden de cierta constante independiente de n). Entonces la probabilidad de obtener $k \in \mathbb{N}$ resultados positivos se parece a un número, distinto de 0.

Definición 2.5 Sea $\lambda \in]0, \infty[$ Una v.a. Z a valores en $\mathbb{N}$ se dirá de Poisson de parámetro λ , si

$$\mathbb{P}(Z = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Escribimos $Z \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Es conveniente extender la definición a $\lambda = 0$ ($Z = 0$ c.s.) y $\lambda = \infty$ ($Z = \infty$ c.s.). Las siguientes propiedades se verifican directamente:

Lema 2.3 Sea $\lambda \in]0, \infty[$ y $Z \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Entonces

- a) $L_{\mathcal{P}(\lambda)}(u) = \exp\{-\lambda(1 - e^{-u})\}$.
- b) $\mathbb{E}(Z) = \lambda$, $Var(Z) = \lambda$.
- c) $\hat{\mu}_Z(\xi) = \exp\{\lambda(e^{i\xi} - 1)\}$.

Las propiedades siguientes dan una mayor intuición sobre las v.a. de Poisson.

Proposición 2.3 Propiedad aditiva: Sea $\lambda_j \in]0, \infty[$ para cada $j \in \mathbb{N}$, y $(Z_j)_{j \in \mathbb{N}}$ una sucesión de v.a. independientes con $Z_j \sim \mathcal{P}(\lambda_j)$. Sea $\lambda := \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \in]0, \infty]$. Entonces

$$Z := \sum_{j=1}^{\infty} Z_j \sim \mathcal{P}(\lambda).$$

Demostración Se tiene

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_1 + Z_2 = m) &= \sum_{k=0}^m \mathbb{P}(Z_1 = k, Z_2 = m - k) \\ &= \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^m \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_2^{m-k}}{(m-k)!} e^{-\lambda_2} m! \\ &= \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^m}{m!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \end{aligned}$$

y por inducción se obtiene el resultado para sumas finitas. Si ahora $Z := \sum_{j=1}^{\infty} Z_j$, dado que para todo $r \in \mathbb{N}$, $\{Z_1 + \dots + Z_n \leq r\} \searrow \{Z \leq r\}$ cuando $n \rightarrow \infty$, se deduce

$$\mathbb{P}(Z_1 + \dots + Z_n \leq r) \rightarrow \mathbb{P}(Z \leq r).$$

Luego, $\mathbb{P}(Z \leq r) = \sum_{k=0}^r e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$. Si $\lambda = \infty$ entonces $\mathbb{P}(Z \leq r) = 0$ para todo $r \in \mathbb{N}$ de donde $Z = \infty$ c.s. En caso contrario, tenemos $\mathbb{P}(Z = r) = \mathbb{P}(Z \leq r) - \mathbb{P}(Z \leq r-1) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^r}{r!}$. $\square$

Lema 2.4 Sumas condicionadas de v.a. de Poisson Sean $Z_j \sim \mathcal{P}(\lambda_j)$ con $j = 1, \dots, m$ v.a. independientes y $\lambda = \sum_{j=1}^m \lambda_j$. Entonces la ley de $(Z_1, \dots, Z_m)$ condicional a $Z := \sum_{j=1}^m Z_j$ es multinomial de parámetros $(Z; \frac{\lambda_1}{\lambda}, \dots, \frac{\lambda_m}{\lambda})$. Es decir

$$\mathbb{P} \left(Z_1 = n_1, \dots, Z_m = n_m \middle| \sum_{j=1}^m Z_j = n \right) = \frac{n!}{n_1! \dots n_m!} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda} \right)^{n_1} \dots \left(\frac{\lambda_m}{\lambda} \right)^{n_m}$$

si $n_1 + \dots + n_m = n$, y 0 si no.

Demostración Se obtiene directamente de las igualdades

$$\mathbb{P}\left(Z_1 = n_1, \dots, Z_m = n_m, \sum_{j=1}^m Z_j = n\right) = \prod_{j=1}^m e^{-\lambda_j} \frac{\lambda_j^{n_j}}{n_j!}, \quad \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^m Z_j = n\right) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}.$$

□

Lema 2.5 Sean $\lambda \in]0, \infty[$ y $p \in]0, 1[$. Sean $Z \sim \mathcal{P}(\lambda)$ y X una v.a. tal que, condicionalmente a Z , X tiene ley $B(Z; p)$. Es decir, para todo $m, k \in \mathbb{N}$ con $k \leq m$,

$$\mathbb{P}(X = k | Z = m) = \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}.$$

Entonces, $X \sim \mathcal{P}(p\lambda)$, $Z - X \sim \mathcal{P}((1-p)\lambda)$ y son independientes.

Demostración

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = m, Z - X = n) &= \mathbb{P}(X = m | Z = n + m) \mathbb{P}(Z = n + m) \\ &= \binom{n+m}{m} p^m (1-p)^n \frac{\lambda^{n+m}}{(n+m)!} e^{-\lambda} \\ &= \frac{(p\lambda)^m}{m!} e^{-p\lambda} \frac{((1-p)\lambda)^n}{n!} e^{-(1-p)\lambda} \end{aligned}$$

□

Ejercicio: Probar recíproca del Lema 2.4:

Lema 2.6 Sea $\lambda \in]0, \infty[$, $Z \sim \mathcal{P}(\lambda)$ y $\mathbf{M} = (\mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_m)$ una v.a. que condicionalmente a Z , tiene ley $\mathcal{M}(Z; p_1, \dots, p_m)$. Entonces las coordenadas de $\mathbf{M}$ son independientes entre sí, y $\mathbf{M}_j \sim \mathcal{P}(p_j \lambda)$.

En el ejercicio anterior se tiene $\sum_{j=1}^m \mathbf{M}_j = Z$. Luego, para cualquier $m \in \mathbb{N}$, una v.a. de Poisson Z siempre es la suma de m v.a. con ley de Poisson, independientes entre sí. Para generarlas, sabiendo que $Z = n$, tiramos n veces un dado de m caras y contamos cuantas veces salió cada una de ellas. Si el dado es equilibrado ($p_j = \frac{1}{m}$ para cada j), entonces las variables $\mathbf{M}_j$ tienen todas la misma ley. Por lo tanto, para cualquier $m \in \mathbb{N}$, una v.a. de Poisson es la suma de m v.a. i.i.d entre sí. Una ley con esta propiedad se dice **infinitamente divisible**. Notar que este hecho también se ve directamente en la transformada de Laplace de $\mathcal{P}(\lambda)$: $L_{\mathcal{P}(\lambda)}(u) = (L_{\mathcal{P}(\lambda/m)}(u))^m$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

2.5 El proceso de Poisson en $\mathbb{R}_+$

Veremos ahora como aparece la v.a. de Poisson cuando observamos durante un intervalo de tiempo la ocurrencia de ciertos "acontecimientos raros", asociados a una cantidad grande de objetos independientes. Por ejemplo, si se observa cierta masa de material radiactivo, y se mide en un intervalo de tiempo la cantidad partículas radioactivas emitidas (en la práctica, esto es lo que hace un "contador Geiger"). Cada partícula emitida corresponde a la desintegración de un átomo. Es muy poco probable que en un intervalo de tiempo (fijo) un determinado átomo se desintegre, pero estamos observando muchísimos átomos y sí es

probable que algunos de ellos lo harán en ese intervalo. Un fenómeno similar se observa cuando registramos los instantes de *llegadas* de llamadas telefónicas a una central telefónica (cada una correspondiendo al instante en que una persona determinada decide hacer una llamada), o las llegadas de clientes a un servicio.

Una manera de ver la conexión entre estos modelos y la ley de Poisson, es dividiendo el intervalo de tiempo $]0, t]$ en m intervalos de igual largo $]t_{k-1}, t_k]$. Si suponemos que en cada intervalo se puede producir a lo más una llegada, cada vez independientemente y con probabilidad p_m , la ley del número de llegadas en $]0, t]$, cuando $m \rightarrow \infty$ y mp_m tiende a una constante no nula está dado por el límite de Poisson.

Adoptaremos un enfoque en apariencia diferente (pero en realidad equivalente), usado habitualmente la modelación de fenómenos como los antes descritos. Este se basa en la observación empírica, hecha por Erlang en los años 1910-1920 de que los tiempos entre llegadas en (por ejemplo) una red telefónica parecen "no tener memoria", y ser independientes entre sí. Esto nos lleva a la construcción "clásica" del llamado **proceso de Poisson en $\mathbb{R}_+$** .

Consideremos $\lambda \in]0, \infty[$ y v.a. $(S_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ independientes de ley $\mathbf{e}(\lambda)$, definidas en cierto espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Nos referiremos a estas variables los "tiempos de permanencia". Llamaremos "instantes de salto del proceso" o "instantes de llegadas" a la sucesión de v.a. definidas para $\omega \in \Omega$,

$$T_0(\omega) = 0, \quad T_1(\omega) = S_1(\omega), \quad T_n(\omega) = S_1(\omega) + \cdots + S_n(\omega).$$

Del hecho que $\mathbb{P}(S_n = 0) = 0$ para todo n , se deduce que la sucesión $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es c.s. estrictamente creciente.

El **proceso de Poisson en $\mathbb{R}_+$ de parámetro λ** es la familia $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ de variables aleatorias definida en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ por

$$N_t(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} n \mathbf{1}_{\{T_n(\omega) \leq t < T_{n+1}(\omega)\}}.$$

Para cada "realización" (cada $\omega \in \Omega$) de todas las variables $T_0(\omega), T_1(\omega), \dots$, la variable aleatoria $N_t(\omega)$ es el número de ellas que han tomado valores en el intervalo $]0, t]$. A su vez, los "incrementos del proceso", es decir las diferencias de la forma $N_{t+s} - N_s$ corresponden exactamente al número de eventos ocurridos en el intervalo $]s, s+t]$.

Es importante notar además las siguientes propiedades:

- Para cada $t \in \mathbb{R}_+$, N_t es un número natural. En particular, es **finito** c.s. Esto se sigue del hecho que para $t > 0$, $\mathbb{P}(T_n \leq t) \leq \mathbb{P}(S_1 \leq t, \dots, S_n \leq t) = (e^{-\lambda t})^n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, luego $\mathbb{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} T_n \leq t) = \mathbb{P}(N_t = \infty) = 0$.
- Para cada "realización" $\omega \in \Omega$, tenemos que $N_0(\omega) = 0$, y la función $t \mapsto N_t(\omega)$ es no decreciente, continua a la derecha con límite por la izquierda, y constante por pedazos. Los largos de los pedazos son las variables S_n . Las discontinuidades ocurren en los instantes de saltos T_n y son de tamaño 1.

A continuación estudiaremos la "ley del proceso".

Lema 2.7 Para todo $t \in \mathbb{R}_+$ se tiene

$$N_t \sim \mathcal{P}(\lambda t).$$

Además para cada $t > 0$, la ley de $T_{n+1} - t$ condicional al evento $\{N_t = n\}$ es igual a la ley de T_1 :

$$\mathbb{P}(T_{n+1} - t > s | N_t = n) = \mathbb{P}(T_1 > s) = e^{-\lambda s}$$

Demostración Notar que se tiene la siguiente igualdad de conjuntos:

$$\{N_t = n\} = \{T_n \leq t < T_n + S_{n+1}\}.$$

Luego, dado que T_n y S_{n+1} son independientes, la primera con ley $\text{Gamma}(\lambda, n)$ y la segunda con ley $\mathbf{e}(\lambda)$, tenemos

$$\mathbb{P}(N_t = n) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \int_0^t x^{n-1} e^{-\lambda x} \int_{t-x}^\infty \lambda e^{-\lambda y} dy dx = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^t x^{n-1} dx = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t},$$

lo que prueba la primera afirmación. Para la segunda, partimos de la igualdad de conjuntos

$$\{N_t = n, T_{n+1} > t + s\} = \{T_n \leq t, T_n + S_{n+1} > t + s\}.$$

Usando nuevamente la independencia de S_{n+1} y T_n , obtenemos que

$$\mathbb{P}(N_t = n, T_{n+1} > t + s) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \int_0^t x^{n-1} e^{-\lambda x} \int_{t+s-x}^\infty \lambda e^{-\lambda y} dy dx = e^{-\lambda(t+s)} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

Dividiendo por $\mathbb{P}(N_t = n)$ se llega a la expresión buscada. $\square$

La segunda parte del Lema anterior es reminiscencia de la pérdida de memoria de la ley exponencial: nos dice simplemente que si sabemos exactamente cuantas "llegadas" han ocurrido hasta el instante t , el tiempo (aleatorio) que transcurrirá hasta la llegada siguiente se comporta como el tiempo (aleatorio) que tarda en ocurrir la primera llegada.

Nos interesa conocer además la "ley conjunta" de varias coordenadas, es decir de los tuplas aleatorias de la forma $(N_{t_1}, N_{t_2}, \dots, N_{t_m})$ para tiempos $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m$.

Lema 2.8 Sean $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Entonces, condicionalmente al evento $\{N_t = n\}$, la ley de los tiempos de permanencia $(T_{n+1} - t, S_{n+2}, \dots, S_{n+m})$ es igual a la ley de $(S_1, \dots, S_m)$, es decir son v.a. independientes con ley $\mathbf{e}(\lambda)$.

Demostración Tenemos la igualdad

$$\begin{aligned} \{N_t = n, T_{n+1} - t > s_1, S_{n+2} > s_2, \dots, S_{n+m} > s_m\} = \\ \{T_n \leq t, T_{n+1} > t + s_1, S_{n+2} > s_2, \dots, S_{n+m} > s_m\}. \end{aligned}$$

y dado que $S_{n+2}, \dots, S_{n+m}$ son independientes de (T_n, T_{n+1}) , la probabilidad de este conjunto es

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_n \leq t, T_{n+1} > t + s_1) \mathbb{P}(S_{n+2} > s_2, \dots, S_{n+m} > s_m) = \\ \mathbb{P}(N_t = n, T_{n+1} > t + s_1) \mathbb{P}(S_{n+2} > s_2, \dots, S_{n+m} > s_m) \end{aligned}$$

Dividiendo por $\mathbb{P}(N_t = n)$ y usando la segunda parte del lema anterior, concluimos que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_{n+1} - t > s_1, S_{n+2} > s_2, \dots, S_{n+m} > s_m | N_t = n) = \\ \mathbb{P}(S_{n+2} > s_2, \dots, S_{n+m} > s_m) \mathbb{P}(T_{n+1} - t > s_1 | N_t = n) = \prod_{j=1}^m e^{-\lambda s_j}.\end{aligned}$$

□

Ahora podemos describir completamente la ley de un proceso de Poisson "standard":

Teorema 2.1 Sean $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m$ instantes dados. Entonces las variables aleatorias $(N_{t_1} - N_{t_0}, N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_m} - N_{t_{m-1}})$ son independientes y sus leyes son Poisson de parámetros $\lambda t_1, \lambda(t_2 - t_1), \dots, \lambda(t_m - t_{m-1})$.
En particular, para todo $t, s > 0$, $N_{t+s} - N_s$ tiene ley $\mathcal{P}(\lambda t)$, igual a la de N_t .

Demostración Haremos la demostración para $m = 2$ (para $m > 2$, la demostración es una generalización de este argumento y se deja al lector como ejercicio). Se tiene

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_{t_1} - N_{t_0} = n, N_{t_2} - N_{t_1} = m) &= \mathbb{P}(N_{t_1} = n, N_{t_2} = n + m) \\ &= \mathbb{P}(T_{n+m} \leq t_2 < T_{n+m+1}, N_{t_1} = n) \\ &= \mathbb{P}(T_{n+m} \leq t_2 < T_{n+m+1} | N_{t_1} = n) \mathbb{P}(N_{t_1} = n).\end{aligned}$$

Dado que

$$\begin{aligned}\{T_{n+m} \leq t_2 < T_{n+m+1}\} &= \{T_{n+1} + \dots + S_{n+m} \leq t_2 < T_{n+1} + \dots + S_{n+m+1}\} \\ &= \{(T_{n+1} - t_1) + \dots + S_{n+m} \leq t_2 - t_1 < (T_{n+1} - t_1) + \dots + S_{n+m+1}\},\end{aligned}$$

por el lema precedente concluimos que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_{n+m} \leq t_2 < T_{n+m+1} | N_{t_1} = n) &= \mathbb{P}(S_1 + \dots + S_m \leq t_2 - t_1 < S_1 + \dots + S_{m+1}) \\ &= \mathbb{P}(T_m \leq t_2 - t_1 < T_{m+1}) \\ &= \mathbb{P}(N_{t_2-t_1} = m)\end{aligned}$$

Combinando las igualdades previas, obtenemos finalmente

$$\mathbb{P}(N_{t_1} - N_{t_0} = n, N_{t_2} - N_{t_1} = m) = \mathbb{P}(N_{t_2-t_1} = m) \mathbb{P}(N_{t_1} = n).$$

□

Así, podemos calcular las covarianzas del proceso para dos instantes $s < t$. En efecto, dado que $N_t - N_s$ y N_s son independientes, entonces $N_t - N_s - \lambda(t - s)$ y $N_s - \lambda s$ también lo son. Tenemos entonces

$$\begin{aligned}\text{cov}(N_s, N_t) &= \mathbb{E}((N_t - \lambda t)(N_s - \lambda s)) \\ &= \mathbb{E}((N_t - N_s - \lambda(t - s))(N_s - \lambda s)) + \mathbb{E}((N_s - \lambda s)^2), \\ &= \mathbb{E}(N_t - N_s - \lambda(t - s)) \mathbb{E}(N_s - \lambda s) + \lambda^2 s^2 \\ &= \lambda^2 s^2\end{aligned}$$

dado que $\mathbb{E}(N_s) = \lambda s$ y que $\mathbb{E}((N_s - \lambda s)^2) = \lambda^2 s^2$.

El teorema nos permite también calcular explícitamente la probabilidad de un eventos para $(N_{t_1}, N_{t_2}, \dots, N_{t_m})$: dados naturales $n_1 \leq \dots \leq n_m$ tenemos para $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m$ que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_{t_1} = n_1, N_{t_2} = n_2, \dots, N_{t_m} = n_m) &= \mathbb{P}(N_{t_1} - N_{t_0} = n_1, N_{t_2} - N_{t_1} = n_2 - n_1, \dots \\ &\quad, N_{t_m} - N_{t_{m-1}} = n_m - n_{m-1}) \\ &= \prod_{j=1}^m e^{-\lambda(t_j - t_{j-1})} \frac{(\lambda(t_j - t_{j-1}))^{n_j - n_{j-1}}}{(n_j - n_{j-1})!}. \end{aligned}$$

Sean $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = t$. Gracias al Lema 2.4 sobre de sumas de v.a. de Poisson condicionadas, y el teorema anterior, podemos obtener la ley del número de llegadas en cada intervalo de tiempo $]t_{j-1}, t_j]$ condicional al número total de llegadas en $]0, t]$. En efecto,

$$N_t = (N_{t_m} - N_{t_{m-1}}) + \dots + (N_{t_1} - N_{t_0})$$

es una suma de v.a. de Poisson independientes $N_{t_j} - N_{t_{j-1}}$, cada una con parámetro $\lambda(t_j - t_{j-1})$. Luego, la suma de los parámetros es λt , y por el Lema 2.4 deducimos la siguiente

Proposición 2.4 *Condionalmente al evento $\{N_t = n\}$, $(N_{t_m} - N_{t_{m-1}}, \dots, N_{t_1} - N_{t_0})$ tiene ley $\mathcal{M}(n; \frac{t_1 - t_0}{t}, \dots, \frac{t_m - t_{m-1}}{t})$*

La ley multinomial nos sugiere que, si sabemos que han ocurrido n llegadas en el intervalo $]0, t]$, los intervalos $]t_{j-1}, t_j]$ en donde ellas se ubican fueron "elegidos" de manera independiente para cada llegada, y cada intervalo con probabilidad $\frac{t_j - t_{j-1}}{t}$.

De hecho, si $U_1, \dots, U_n$ son n v.a. i.i.d de ley uniforme en $]0, t]$, es decir, cada U_j tiene densidad

$$\frac{1}{t} \mathbf{1}_{]0, t]}(x),$$

entonces el vector con el número de ellas que cae en cada intervalo $]t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, \dots, m$ tiene justamente la misma distribución multinomial $\mathcal{M}(n; \frac{t_1 - t_0}{t}, \dots, \frac{t_m - t_{m-1}}{t})$.

Esto refleja una relación profunda entre el proceso de Poisson, visto como una "distribución aleatoria de puntos en $\mathbb{R}_+$ " y la ley uniforme, la que formalizamos a continuación.

Proposición 2.5 *Sea $t > 0$ y $U_1, \dots, U_n$ v.a. i.i.d de ley uniforme en $]0, t]$. Entonces, la ley de los instantes de salto $(T_1, \dots, T_n)$ condicional al evento $\{N_t = n\}$, es igual a la ley del reordenamiento creciente $(U_{(1)}, \dots, U_{(n)})$ del vector $(U_1, \dots, U_n)$.*

Demostración Dado que $(T_1, \dots, T_n)$ y $(U_{(1)}, \dots, U_{(n)})$ son crecientes, basta probar que

$$\mathbb{P}(T_1 \leq s_1, T_2 \leq s_2, \dots, T_n \leq s_n | N_t = n) = \mathbb{P}(U_{(1)} \leq s_1, \dots, U_{(n)} \leq s_n).$$

para $0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_n < t$ (si $s_j > s_{j+1}$, se puede reemplazar s_j por s_{j+1} y se obtiene un evento equivalente). En ese caso, para $(V_j)_{j=1}^n = (T_j)_{j=1}^n$ y $(V_j)_{j=1}^n = (U_{(j)})_{j=1}^n$ se puede descomponer $\{V_1 \leq s_1, \dots, V_n \leq s_n\}$ en una unión disjunta de eventos de la forma

$$\{|\{j : V_j \in]0, s_1]\}| = m_1, |\{j : V_j \in]s_1, s_2]\}| = m_2, \dots, |\{j : V_j \in]s_{n-1}, s_n]\}| = m_n\}$$

con $0 \leq m_i \leq n$ para $i = 1, \dots, n$ y $m_1 + \dots + m_n = n$ ($|\cdot|$ denota aquí el cardinal). Pero

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|\{j : U_{(j)} \in]0, s_1]\}| = m_1, \dots, |\{j : U_{(j)} \in]s_{n-1}, s_n]\}| = m_n) \\ = \mathbb{P}(|\{j : U_j \in]0, s_1]\}| = m_1, \dots, |\{j : U_j \in]s_{n-1}, s_n]\}| = m_n) \\ = \frac{n!}{(m_1!) \dots (m_n!)} \left(\frac{s_1}{t}\right)^{m_1} \dots \left(\frac{s_n - s_{n-1}}{t}\right)^{m_n} \\ = \mathbb{P}(N_{s_1} = m_1, \dots, N_{s_n} - N_{s_{n-1}} = m_n | N_t = n) \end{aligned}$$

la última igualdad gracias a la Proposición 2.4. Se concluye usando la igualdad de eventos

$$\begin{aligned} \{N_{s_1} = m_1, \dots, N_{s_n} - N_{s_{n-1}} = m_n, N_t = n\} = \\ \{|\{j : T_j \in]0, s_1]\}| = m_1, \dots, |\{j : T_j \in]s_{n-1}, s_n]\}| = m_n, N_t = n\} \end{aligned}$$

□

3 Procesos puntuales de Poisson en espacios generales

Vamos a generalizar a continuación la noción de proceso de Poisson desde $\mathbb{R}_+$ a espacios mucho más generales.

Los instantes de llegadas del Proceso de Poisson en $\mathbb{R}_+$ constituyen un conjunto numerable de "puntos" $(T_1, \dots, T_n, \dots)$ ubicados aleatoriamente en $\mathbb{R}_+$, para los cuales podemos describir (en ley) el número de puntos que caen en un intervalo, dónde y cómo se ubican en él (si sabemos cuantos son), y también como se relacionan las cantidades de puntos de intervalos disjuntos. El proceso de Poisson N_t "cuenta" el número de puntos en cada intervalo $(a, b]$. Más aún, para cada realización de las v.a. $(T_1, \dots, T_n, \dots)$, de las propiedades de $t \mapsto N_t$ (creciente continua a la derecha) podemos decir que es la función de distribución de una medida en $\mathbb{R}_+$, que le otorga masa 1 a cada T_n . Es un ejemplo del concepto que ahora introducimos:

Definición 3.1 Sea (S, Σ) un espacio medible, y suponemos que todo los singletons $\{x\}$ son elementos de Σ .

Una **medida puntual** es una medida $\mathcal{N} : \Sigma \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ de la forma:

$$\mathcal{N} = \sum_{i \in I} \delta_{x_i}$$

donde I un conjunto finito o numerable y $\{x_i\}_{i \in I}$ una sucesión de elementos de S .

Aquí, δ_x es la medida de Dirac en $x \in S$, vale decir, para $A \in \Sigma$ y cada $i \in I$ $\delta_{x_i}(A) = \mathbf{1}_A(x_i)$. Luego

$$\mathcal{N}(A) = \sum_{i \in I} \mathbf{1}_A(x_i)$$

es el número de términos de la sucesión $x_i, i \in I$ que pertenecen al conjunto A .

Llamaremos a los elementos de la sucesión $x_i, i \in I$ los **átomos** de la medida puntual $\mathcal{N}$. Notemos que *no estamos exigiendo* que los átomos sean todos distintos. En el caso en que sí lo sean, podemos pensar en $\{x_i\}_{i \in I}$ como un conjunto.

La integral c/r a δ_{x_i} de una función medible positiva está dada por $\int_S f(x)\delta_{x_i}(dx) = f(x_i)$, y luego

$$\int_S f(x)\mathcal{N}(dx) = \sum_{i \in I} f(x_i)$$

es simplemente la suma de los valores de f en los átomos $\{x_i\}_{i \in N}$.

En todo lo que sigue, (S, Σ) será un espacio medible tal que los singletons son medibles.

Presentamos el concepto principal a tratar en este curso:

Definición 3.2 Sea (S, Σ) un espacio medible y $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Una **medida puntual de Poisson** en (S, Σ) es una familia de variables aleatorias

$$\mathcal{N} = \{\mathcal{N}(\cdot, A) : \Omega \mapsto \mathbb{N} \cup \{\infty\}\}_{A \in \Sigma}$$

tales que

a) Para todo $\omega \in \Omega$,

$$\mathcal{N}(\omega, \cdot) : \Sigma \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

es una medida puntual.

b) Para todo $A \in \Sigma$, la v.a. $\mathcal{N}(\cdot, A)$ a valores en $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ tiene distribución de Poisson.

c) Para toda familia finita $A_1, \dots, A_m \in \Sigma$ de conjuntos disjuntos, las v.a.

$$\mathcal{N}(\cdot, A_1), \dots, \mathcal{N}(\cdot, A_m)$$

son independientes.

En general, usaremos la notación $\mathcal{N}^\omega(A) := \mathcal{N}(\omega, A)$, o simplemente $\mathcal{N}(A)$. Así, $\mathcal{N}(A)$ es el número (aleatorio) de puntos en A .

Si denotamos por $\nu(A)$ el parámetro de la v.a. de Poisson $\mathcal{N}(A)$ entonces se tiene

$$\nu(A) := \mathbb{E}(\mathcal{N}(A)).$$

Además, usando el teorema de convergencia monótona se verifica que si $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \Sigma$ es una familia de conjuntos disjuntos, entonces

$$\nu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) := \mathbb{E}\left(\mathcal{N}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(\mathcal{N}(A_n)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(A_n).$$

Dado que $\mathcal{N}(\omega, \emptyset) = 0$, concluimos que ν es una medida en Σ .

Definición 3.3 La medida $\nu(A) := \mathbb{E}(\mathcal{N}(A))$ asociada a la medida puntual de Poisson $\mathcal{N}$ se denomina **medida de intensidad** de $\mathcal{N}$.

Notar que se puede tener $\nu(A) = \infty$, en cuyo caso $\mathcal{N}(A) = \infty$ c.s.

Ejemplo: Si (T_n) son los instantes de llegadas de un proceso de Poisson en $\mathbb{R}_+$ de parámetro λ , entonces para cada ω ,

$$\mathcal{N}^\omega(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{1}_A(T_n)$$

es una medida puntual, y se $N_t := \mathcal{N}([0, t])$ es exactamente el proceso de Poisson. Por lo visto en la sección precedente, las propiedades *b)* y *c)* en la definición 3.2 se satisfacen para intervalos. Es posible probar que también se cumplen para conjuntos medibles cualesquiera, y por lo tanto $\mathcal{N}$ es una medida puntual de Poisson. Notar que la medida de intensidad ν de $\mathcal{N}$ en intervalos es $\mathbb{E}(\mathcal{N}((a, b])) = \lambda(b - a)$. Luego, ν es un múltiplo de la medida de Lebesgue.

Probaremos que bajo hipótesis muy generales, dado un espacio de medida (S, Σ, ν) , siempre existe (definida en algún espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$) una medida puntual de Poisson en (S, Σ) con medida de intensidad ν . Para ello se usará el siguiente resultado, que de por sí es de interés:

Teorema 3.1 Superposición Sea $(\mathcal{N}_n)$ una sucesión de medidas puntuales de Poisson en (S, Σ) independientes, con medidas de intensidad respectivas ν_n . Entonces,

$$\mathcal{N} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{N}_n$$

es una medida puntual de Poisson con medida de intensidad $\nu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu_n$.

Demostración Claramente, para cada ω , $\mathcal{N}^\omega = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{N}_n^\omega$ es una medida a valores en $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. El resto es una consecuencia del teorema aditivo para v.a. de Poisson: para cada $A \in \Sigma$,

$$\mathcal{N}(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{N}_n(A)$$

es una suma de v.a. independientes de Poisson de parámetros $\nu_n(A)$. Luego, es una v.a. de Poisson de parámetro $\sum_{n \in \mathbb{N}} \nu_n(A)$. Por otro lado, si $A_1, \dots, A_m \in \Sigma$ son disjuntos, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ las v.a. $\mathcal{N}_n(A_1), \dots, \mathcal{N}_n(A_m)$ son independientes con respecto a m . Dado que las medidas puntuales de Poisson $(\mathcal{N}_n)$ son independientes c/r a n , entonces las v.a.

$$\mathcal{N}_n(A_j), \quad j = 1, \dots, m, n \in \mathbb{N}$$

son independientes en n y j . Por lo tanto, las v.a. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{N}_n(A_j)$ son independientes en j . $\square$

Recordemos que un espacio de medida (S, Σ, ν) se dice **σ -finito** si existe una sucesión (B_n) de conjuntos medibles tales que $\cup_{n \in \mathbb{N}} B_n = S$.

Teorema 3.2 Existencia Sea (S, Σ, ν) un espacio de medida σ -finito. Entonces existe una medida puntual de Poisson $\mathcal{N}$ en (S, Σ) con medida de intensidad ν .

Demostración Supongamos primero que $\nu(S) < \infty$. Notemos que la medida $\frac{\nu(dx)}{\nu(S)}$ es una medida de probabilidad.

Vamos a construir "a mano" la medida puntual de Poisson $\mathcal{N}$. Para esto nos inspiraremos del Proceso de Poisson en $\mathbb{R}_+$.

Sea Z una v.a. de Poisson con parámetro $\nu(S)$, que corresponderá al número de puntos aleatorios que hay en S . Sean $(Y_i)_{i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ v.a. i.i.d de ley $\frac{\nu(dx)}{\nu(S)}$, independientes de Z . Definimos entonces la medida puntual $\mathcal{N}$ por

$$\mathcal{N} = \sum_{i=1}^Z \delta_{Y_i},$$

ed decir $\mathcal{N}(A) = \sum_{j=1}^Z \mathbf{1}_A(Y_j)$. Veamos que es una medida puntual de Poisson. Para cada $A_1, \dots, A_m \in \Sigma$ una partición de S , y $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$ tales que $n_1 + \dots + n_m = n$ tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathcal{N}(A_1) = n_1, \dots, \mathcal{N}(A_m) = n_m) &= \mathbb{P}(\mathcal{N}(A_1) = n_1, \dots, \mathcal{N}(A_m) = n_m | Z = n) \mathbb{P}(Z = n) \\ &= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_1}(Y_j) = n_1, \dots, \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_m}(Y_j) = n_m\right) \mathbb{P}(Z = n) \end{aligned}$$

la última igualdad dado que $(Y_1, \dots, Y_n)$ son independientes de Z . La v.a.

$$\mathbf{M} = \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_1}(Y_j), \dots, \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_m}(Y_j) \right)$$

cuenta el número de veces que las v.a. $(Y_1, \dots, Y_n)$ "cayeron" en cada uno de los conjuntos $A_1, \dots, A_m$. Cada Y_j cae en A_i con probabilidad $\frac{\nu(A_i)}{\nu(S)}$, independientemente de las demás.

Luego $\mathbf{M}$ tiene ley multinomial $\mathcal{M}(n; \frac{\nu(A_1)}{\nu(S)}, \dots, \frac{\nu(A_m)}{\nu(S)})$. Deducimos de esto y de la ley de Z que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathcal{N}(A_1) = n_1, \dots, \mathcal{N}(A_m) = n_m) &= \\ \frac{n!}{(n_1!) \dots (n_m!)} \left(\frac{\nu(A_1)}{\nu(S)} \right)^{n_1} \dots \left(\frac{\nu(A_m)}{\nu(S)} \right)^{n_m} e^{-\nu(S)} \frac{\nu(S)^n}{n!} &= \prod_{j=1}^m e^{-\nu(A_j)} \frac{\nu(A_j)^{n_j}}{n!} \end{aligned}$$

lo que prueba que $\mathcal{N}(A_1), \dots, \mathcal{N}(A_m)$ son v.a. de Poisson independientes de parámetros $\nu(A_1), \dots, \nu(A_m)$.

Ahora consideramos el caso $\nu(S) = \infty$. Sean $(\Theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una partición medible de S tal que $\nu(\Theta_n) < \infty$. Por lo recién visto, para cada n podemos construir una familia independiente $\{\mathcal{N}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de medidas puntuales de Poisson, con cada $\mathcal{N}_n$ definida en (Θ_n, Σ_n) (Σ_n es la σ -álgebra traza de Σ en Θ_n), y con medida de intensidad $\nu(\cdot \cap \Theta_n)$.

Definamos una medida puntual $\mathcal{N}$ en (S, Σ) por

$$\mathcal{N}(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{N}_n(A \cap \Theta_n).$$

Entonces, por el Teorema 3.1 de Superposición, $\mathcal{N}(A)$ es una medida de puntual de Poisson cuya medida de intensidad está dada por

$$\mathbb{E}(\mathcal{N}(A)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(\mathcal{N}_n(A \cap \Theta_n)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(A \cap \Theta_n) = \nu(A).$$

□

En todo lo que sigue, (S, Σ, ν) es un espacio de medida y $\mathcal{N}$ una medida puntual de Poisson en (S, Σ) con medida de intensidad ν .

El siguiente Teorema entrega una manera de obtener una medida puntual de Poisson a partir de otra. La demostración no es difícil y se propone como ejercicio.

Teorema 3.3 (de Mapeo) Sea (S', Σ') otro espacio medible y $\Psi : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ un función medible. Entonces la familia de v.a.

$$\tilde{\mathcal{N}} = \{\tilde{\mathcal{N}}(B) = \mathcal{N}(\Psi^{-1}(B))\}_{B \in \Sigma'}$$

es una medida puntual de Poisson en (S', Σ') con medida de intensidad $\tilde{\nu}$ definida por $\tilde{\nu}(B) = \nu(\Psi^{-1}(B))$.

Nos interesaremos ahora en estudiar algunos "funcionales" de una medida puntual de Poisson, de la forma

$$\langle \mathcal{N}, f \rangle := \int_S f(x) \mathcal{N}^\omega(dx)$$

es decir, la suma de los valores de la función medible $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ en los átomos de $\mathcal{N}$.

Un resultado fundamental sobre medidas puntuales de Poisson, es que se puede caracterizar de manera simple una clase de funciones tal que, para toda f positiva en esa clase *la integral c/r a $\mathcal{N}$ converge casi seguramente*, y para toda f positiva fuera de la clase *la integral diverge casi seguramente*.

Más aún, en los casos en que la suma $\int_S f(x) \mathcal{N}^\omega(dx)$ esté definida c.s. podremos precisar su ley.

Comencemos con un caso sencillo. Sea f una función "simple positiva", es decir, tal que existe una familia finita $A_1, \dots, A_m \in \Sigma$ disjuntos, con $\nu(A_j) < \infty$, y reales $\alpha_1, \dots, \alpha_m \geq 0$ tales que

$$f(x) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \mathbf{1}_{A_j}(x).$$

Entonces $\langle \mathcal{N}, f \rangle = \sum_{j=1}^m \alpha_j \mathcal{N}(A_j)$ y, tomando esperanza, tenemos

$$\mathbb{E}(\langle \mathcal{N}, f \rangle) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \nu(A_j) = \int_S f(x) \nu(dx)$$

Para $f \geq 0$ medible general, tomando (f_k) una sucesión de funciones simples positivas tal que $f_k \nearrow f$ cuando $k \rightarrow \infty$, vemos que la igualdad anterior también se cumple en este caso.

En particular, si $f \geq 0$ pertenece a $L^1(S, \Sigma, \nu)$, entonces

$$\langle \mathcal{N}, f \rangle < \infty \quad c.s.$$

Además, gracias a la independencia de las v.a. $\mathcal{N}(A_j)$ y la fórmula para sus transformadas de Laplace, obtenemos

$$\mathbb{E}(e^{-\langle \mathcal{N}, f \rangle}) = \prod_{j=1}^m \mathbb{E}(e^{-\alpha_j \mathcal{N}(A_j)}) = \prod_{j=1}^m \exp(-\nu(A_j)(1 - e^{-\alpha_j})).$$

Es decir,

$$\mathbb{E}(e^{-\langle \mathcal{N}, f \rangle}) = \exp\left(-\sum_{j=1}^m (1 - e^{-\alpha_j}) \nu(A_j)\right) = \exp\left(-\int_S 1 - e^{-f(x)} \nu(dx)\right).$$

Si f es ahora una función medible positiva cualquiera, tomando (f_k) funciones simples postivas tal que $f_k \nearrow f$ cuando $k \rightarrow \infty$, se tiene

$$\mathbb{E}(e^{-\langle \mathcal{N}, f_k \rangle}) \rightarrow \mathbb{E}(e^{-\langle \mathcal{N}, f \rangle}) \text{ y } \exp \left(- \int_S 1 - e^{-f_k(x)} \nu(dx) \right) \rightarrow \exp \left(- \int_S 1 - e^{-f(x)} \nu(dx) \right)$$

(el primer límite por convergencia dominada, el segundo por convergencia monótona).

La igualdad

$$\mathbb{E}(e^{-u\langle \mathcal{N}, f \rangle}) = \exp \left(- \int_S 1 - e^{-uf(x)} \nu(dx) \right). \quad (1)$$

es entonces válida para toda función medible f positiva y todo real $u \geq 0$, incluso si la integral $\int_S 1 - e^{-uf(x)} \nu(dx) = \infty$. En ese caso, el lado derecho es idénticamente 0, y por lo tanto $\mathbb{E}(e^{-u\langle \mathcal{N}, f \rangle}) = 0$, lo que equivale a $\langle \mathcal{N}, f \rangle = \infty$ c.s.

La fórmula (1) se conoce como **fórmula exponencial** y tiene varias apliaciones.

Por ejemplo, permite caracterizar si una "medida puntual aleatoria" es una medida puntual de Poisson:

Teorema 3.4 Caracterización de una medida puntual de Poisson Sea (S, Σ, ν) espacio de medida. Sea

$$\mathcal{N} = \{ \mathcal{N}(\cdot, A) : \Omega \mapsto \mathbb{N} \cup \{\infty\} \}_{A \in \Sigma}$$

una familia de variables aleatorias tal que para todo $\omega \in \Omega$,

$$\mathcal{N}(\omega, \cdot) : \Sigma \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

es una medida puntual en (S, Σ, ν) . Entonces $\mathcal{N}$ es una medida puntual de Poisson con medida de intensidad ν ssi para toda función medible $f \geq 0$ se tiene

$$\mathbb{E}(e^{-\langle \mathcal{N}, f \rangle}) = \exp \left(- \int_S 1 - e^{-f(x)} \nu(dx) \right).$$

Demostración Ya probamos que la condición es necesaria. La demostración de la suficiencia similar. En efecto, tomando f de la forma

$$f(x) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \mathbf{1}_{A_j}(x)$$

con $A_1, \dots, A_m \in \Sigma$ disjuntos, $\nu(A_j) < \infty$, y $\alpha_1, \dots, \alpha_m \geq 0$, por cálculos previos y gracias a la *inyectividad de la Transformada de Laplace* vemos que las v.a. $\mathcal{N}(A_1), \dots, \mathcal{N}(A_m)$ son Poisson independientes de parámetros $\nu(A_1), \dots, \nu(A_m)$. □

Usaremos ahora la fórmula exponencial para probar un resultado general sobre convergencia casi segura de sumas del tipo $\langle \mathcal{N}, f \rangle$:

Teorema 3.5 Sea $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ medible. Entonces, la suma $\langle \mathcal{N}, f \rangle$ es absolutamente convergente con probabilidad 1 si y sólo si

$$\int_S \min\{1, |f(x)|\} \nu(dx) < \infty.$$

Demostración Necesitamos probar que $\langle \mathcal{N}, |f| \rangle < \infty$ c.s. ssi $\int_S \min\{1, |f(x)|\} \nu(dx) < \infty$. Recordemos que

$$\mathbb{P}(\langle \mathcal{N}, |f| \rangle < \infty) = \lim_{u \rightarrow 0} \mathbb{E}(e^{-\langle \mathcal{N}, u|f| \rangle}).$$

Supongamos que $\int_S \min\{1, |f(x)|\} \nu(dx) < \infty$. Tenemos por desigualdades usuales para la exponencial que $1 - e^{-u|f(x)|} \leq \min\{1, u|f(x)|\} \rightarrow 0$ si $u \rightarrow 0$, y esto está dominado por $\min\{1, |f(x)|\}$ para $u \leq 1$. Luego, $\lim_{u \rightarrow 0} \exp\left(-\int_S 1 - e^{-u|f(x)|} \nu(dx)\right) = 1$. Gracias a la identidad (1), esto implica que

$$\mathbb{P}(\langle \mathcal{N}, |f| \rangle < \infty) = 1.$$

Supongamos ahora que $\int_S \min\{1, |f(x)|\} \nu(dx) = \infty$. Entonces, $\nu(\{|f| \geq 1\}) = \infty$ o $\int_S |f(x)| \mathbf{1}_{\{|f| > 1\}} \nu(dx) = \infty$. Por otro lado, para $u \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} 1 - e^{-u|f(x)|} &\geq (1 - e^{-u}) \mathbf{1}_{\{|f| \geq 1\}} + (1 - e^{-u|f(x)|}) \mathbf{1}_{\{|f| < 1\}} \\ &= (1 - e^{-u}) \mathbf{1}_{\{|f| \geq 1\}} + \left(\inf_{y \in [0, 1]} \frac{1 - e^y}{y} \right) u |f(x)| \mathbf{1}_{\{|f| < 1\}} \end{aligned}$$

donde el inf es estrictamente positivo. Luego, $\int_S 1 - e^{-u|f(x)|} \nu(dx) = \infty$ para todo $u \in [0, 1]$ y por lo tanto de (1), $\mathbb{P}(\langle \mathcal{N}, |f| \rangle < \infty) = 0$. $\square$

El siguiente teorema nos da la ley de la v.a. $\langle \mathcal{N}, f \rangle$ (cuando la suma converge c.s.) . La demostración se hace considerando partes positiva y negativa de f propone como ejercicio:

Teorema 3.6 Funcionales de Laplace y de Fourier de una medida puntual de Poisson Sea $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ medible tal que $\int_S \min\{1, |f(x)|\} \nu(dx) < \infty$. Entonces, su función característica es

$$\mathbb{E}(e^{-i\xi \langle \mathcal{N}, f \rangle}) = \exp \left(\int_S (e^{i\xi f(x)} - 1) \nu(dx) \right)$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}$. Si $f \geq 0$ la transformada de Laplace de $\langle \mathcal{N}, f \rangle$ es

$$\mathbb{E}(e^{-u \langle \mathcal{N}, f \rangle}) = \exp \left(- \int_S 1 - e^{-u f(x)} \nu(dx) \right).$$

para $u \geq 0$. Además, si $\int |f(x)| \nu(dx) < \infty$ se tiene

$$\mathbb{E}(\langle \mathcal{N}, f \rangle) = \int_S f(x) \nu(dx)$$

y

$$\text{Var}(\langle \mathcal{N}, f \rangle) = \int_S f(x)^2 \nu(dx)$$

sea esta integral finita o no.

4 Ejercicios Propuestos

I. Problemas

1. Sea (N_t) proceso de Poisson standard en $\mathbb{R}_+$ con tasa λ y $\mathcal{N}$ la medida puntual aleatoria en $\mathbb{R}_+$ definida por

$$\mathcal{N}([0, t]) = N_t.$$

Se probará que $\mathcal{N}$ es una medida puntual de Poisson con intensidad $\nu(dx) = \lambda dx$.

- a) Verifique que la fórmula exponencial se cumple para $f(x) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \mathbf{1}_{A_j}(x)$ con $A_1, \dots, A_m \in \Sigma$ intervalos disjuntos, y $\alpha_1, \dots, \alpha_m \geq 0$.
 - b) Pruebe que se cumple también para f función continua a soporte compacto.
 - c) Concluya para f general. Puede usar el hecho que las funciones continuas a soporte compacto en $\mathbb{R}$ son densas en $L^1(dx)$
2. Sea (N_t) proceso de Poisson standard en $\mathbb{R}_+$, y (T_n) sus instantes de salto.
 - a) Encuentre la ley de la v.a $L = t - T_{N_t}$, es decir "el tiempo transcurrido entre el último salto anterior a t y t " (Por convención, en el evento $\{T_1 > t\}$ se toma $L = +\infty$.)
 - b) Sea N'_t otro proceso de Poisson en $\mathbb{R}_+$, independiente de N_t . Pruebe que, con probabilidad 1, N_t y N'_t nunca saltan al mismo tiempo. (Una forma posible es utilizar la medida puntual en $\mathbb{R}_+^2$: $\sum_{n,m \in \mathbb{N}} \delta_{(T_n, T'_m)}$).
 3. Sea $\mathcal{N}$ medida puntual de Poisson en (S, Σ, ν) y $A \in \Sigma$ con $\nu(A) < \infty$. Sean $A_1, \dots, A_m$ subconjuntos de A medibles disjuntos. Cuál es la ley de $(\mathcal{N}(A_1), \dots, \mathcal{N}(A_m))$ condicional a $\{\mathcal{N}(A) = n\}$?

II. Sea $\mathcal{N}$ en la medida puntual de Poisson en $\mathbb{R}^d$ de intensidad $\lambda dx dy$ y denotemos por (T_n) sus átomos. Pruebe que $\sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_{|T_n|}$ y $\sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_{|T_n|^2}$ son procesos de Poisson puntuales en $\mathbb{R}_+$ y encuentre sus medidas de intensidad. Deduzca la ley de la distancia del origen al átomo de $\mathcal{N}$ más cercano.

III. Proceso de Poisson compuesto Sea N_t proceso de Poisson en $\mathbb{R}_+$ y (T_n) sus instantes de salto. Sea (Y_n) una sucesión de v.a. i.i.d a valores en $\mathbb{R}^d$, independientes de N_t . Se define

$$X_t = \sum_{n \in \mathbb{N}} Y_n \mathbf{1}_{\{T_n \leq t < T_{n+1}\}}.$$

- a) Calcule $\hat{\mu}_{X_t}$.
- b) Pruebe que $\sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_{T_n, Y_n}$ es una medida puntual de Poisson y encuentre su intensidad.
- c) Pruebe que existe una función medible $f(t, s, x)$ tal que c.s. para todo $t \geq 0$, $X_t = \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d} f(t, s, x) \mathcal{N}(ds, dx)$ y deduzca de aquí la fórmula de $\hat{\mu}_{X_t}$.

IV. Procesos puntuales de Poisson marcados y aplicaciones

Sea (S, Σ) y (S', Σ') otro espacio medible. Una función $p : S \times \Sigma' \rightarrow [0, 1]$ se denomina "núcleo de transición" si

a) Para todo $x \in S$, $p(x, \cdot) : S' \rightarrow [0, 1]$ es una medida de probabilidad.

b) Para todo $B \in \Sigma'$, $p(\cdot, B) : S \rightarrow [0, 1]$ es medible.

(Podemos pensar que cada punto $x \in S$ tiene asociada una medida de probabilidad en Σ' .)

Sea ahora $\mathcal{N}$ una medida puntual de Poisson en el espacio de medida σ -finito (S, Σ, ν) y $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sus átomos.

Asignamos a cada T_n una "marca aleatoria" Y_n en S' , de la manera siguiente: Para todo n , condicionalmente a $(T_1, \dots, T_n)$, $(Y_1, \dots, Y_n)$ son v.a. independientes, cada una con ley $p(T_n, dy)$.

Definimos una medida puntual aleatoria en (S, S') por

$$\mathcal{N}^* = \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_{(T_n, Y_n)}$$

a) Muestre que para todo $m \in \mathbb{N}$, y $f : S \times S' \rightarrow \mathbb{R}_+$ se tiene

$$\mathbb{E} \left(e^{-\sum_{n=0}^m f(T_n, Y_n)} \right) = \mathbb{E} \left(\exp \left\{ \sum_{n=0}^m \log \int_{S'} e^{-f(T_n, y)} p(T_n, dy) \right\} \right)$$

y deduzca que

$$\mathbb{E} \left(e^{-\langle \mathcal{N}^*, f \rangle} \right) = \mathbb{E} \left(e^{-\langle \mathcal{N}, f^* \rangle} \right)$$

donde $f^*(x) = -\log \int_{S'} e^{-f(x, y)} p(x, dy)$.

b) Conluya que $\mathcal{N}^*$ es medida puntual de Poisson en $(S \times S', \Sigma \otimes \Sigma')$ con medida de intensidad dada por

$$\nu^*(dx, dy) = \mu(dx) p(x, dy).$$

c) **Procesos de Poisson filtrados** Suponga que cada átomo T_n de $\mathcal{N}$ se borra independientemente, con probabilidad $p(x)$ si $T_n = x$. Muestre que los átomos no borrados constituyen una medida puntual de Poisson y encuentre su intensidad.

d) **Procesos de Poisson coloreados** Suponga que a cada átomo T_n de $\mathcal{N}$ asigna de manera independiente un color entre m colores posibles $\{c_1, \dots, c_m\}$, con probabilidad $p_1(x), \dots, p_m(x)$ si $T_n = x$. Si $\mathcal{N}^i$ es el conjunto de puntos coloreados c_i , pruebe que $\mathcal{N}^1, \dots, \mathcal{N}^m$ son medidas de Poisson independientes y explicitar sus medidas de intensidad.

d) Suponga que los clientes de un centro comercial llegan según un proceso de Poisson en $\mathbb{R}_+$ de tasa $\lambda(t)$, y que circulan por ella de manera independiente hasta que se van. Suponga que la probabilidad de que un cliente que llega a la hora s se encuentre a la hora $t > s$ en una tienda determinada es $p(s, t)$. Pruebe que el número de clientes que se encuentran en esa tienda a la hora t es una v.a. de Poisson. Encuentre su parámetro.

Nota: Eso es una generalización **Teorema de Bartlett para colas** ($M/M/\infty$): las llegadas a un servicio son Poissonianas con tasa α , hay infinitos servidores y los tiempos de atención son exponenciales independientes de parámetro β . Entonces, el número de personas presentes en el servicio en el tiempo t es una v.a. de Poisson de parámetro $\lambda(t) = \frac{\alpha}{\beta} + (\lambda(0) - \frac{\alpha}{\beta})e^{-\beta t}$.