

PAUTA CONTROL 1 MA44C¹

9 de Octubre de 2007

Profesor: Joaquín Fontbona

Auxiliar: Aitor Aldunate

Tiempo: 3hrs.

P1. “Inestabilidad del protocolo de comunicación ALOHA”.

El protocolo de comunicación “ALOHA” es un conjunto de reglas de acceso a una red de comunicación o informática, en la cual hay sólo un canal de acceso y muchos usuarios deseando un enviar mensaje. (Este es el caso de sistemas como Ethernet y Wi-Fi). El canal de acceso puede transmitir un mensaje y sólo uno a la vez, y en instantes discretos o “ranuras” enumeradas por $n \in \mathbb{N}$.

A cada instante n , llega una cierta cantidad A_n de mensajes **todos los cuales** solicitarán ser transmitidos en la etapa siguiente $n + 1$.

A su vez existe una “cola” de X_n mensajes que no pudieron ser transmitidos previamente. Cada uno de los X_n mensajes **puede o no reintentar** acceder al canal al instante siguiente $n + 1$.

El canal efectuará una transmisión **sólo si un solo mensaje** (que puede ser uno de la cola o uno recién llegado) requiere ser transmitido. En caso contrario, colapsa (es decir, no se transmite nada) y todos los mensajes que intentaron pasar se mandan a la cola.

El objetivo de este problema es mostrar que bajo ciertas hipótesis razonables, el número X_n de mensajes en la cola es una cadena de Markov, y que el protocolo ALOHA es “inestable”, es decir, que la cadena (X_n) **no es recurrente positiva**.

Se denotará por Z_n el número de mensajes entre los X_n de la cola, que intentará acceder al canal en la etapa $n + 1$, y se harán las siguientes hipótesis:

- a) (A_n) son variables aleatorias i.i.d, con $\mathbb{P}(A_n = j) = a_j$, y tales que $a_0 + a_1 \in (0, 1)$.
- b) *Condionalmente a* $\{X_n = i\}$, Z_n es independiente de $(X_0, \dots, X_{n-1})$.
- c) A_n es independiente de $X_0, \dots, X_n$ y de Z_n .

Se sugiere proceder de la manera siguiente:

- i) Sea $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$. Para cada $i \in \mathbb{N}, k \in \{0, \dots, i\}$, calcule

$$\mathbb{P}(Z_n = k | X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) \quad \text{y} \quad \mathbb{P}(Z_n = k | \mathcal{F}_n)$$

en términos de $b_k(i) := \mathbb{P}(Z_n = k | X_n = i)$.

Solución:

¹Dudas y comentarios a aldunate@dim.uchile.cl

Primero desarrollemos la probabilidad condicional ocupando la condición (b),

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(Z_n = k | X_0 = i_0, \dots, X_n = i) &= \frac{\mathbb{P}(Z_n = k, X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i)}{\mathbb{P}(X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i)} \\
 &= \frac{\mathbb{P}(Z_n = k, X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1} | X_n = i) \mathbb{P}(X_n = i)}{\mathbb{P}(X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1} | X_n = i) \mathbb{P}(X_n = i)} \\
 &= \frac{\mathbb{P}(Z_n = k | X_n = i) \mathbb{P}(X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1} | X_n = i)}{\mathbb{P}(X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1} | X_n = i)} \\
 &= b_k(i).
 \end{aligned}$$

Así se concluye que $\mathbb{P}(Z_n = k | \mathcal{F}_n) = b_k(X_n)$.

- ii) Pruebe que si X, A y Z son v.a. aleatorias a valores en $\mathbb{N}$ definidas en un e. de p. $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, tales que X es medible c/r a una tribu $\mathcal{F} \subseteq \Sigma$, y A es independiente de $\mathcal{F}$ y de $\sigma(Z)$, entonces

$$\mathbb{E}(f(X)g(Z)h(A)|\mathcal{F}) = \mathbb{E}(g(Z)|\mathcal{F})f(X)\mathbb{E}(h(A))$$

para toda $f, g, h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ acotada.

Solución:

Como X es $\mathcal{F}$ medible, $\mathbb{E}(f(X)g(Z)h(A)|\mathcal{F}) = f(X)\mathbb{E}(g(Z)h(A)|\mathcal{F})$, ahora ocupando propiedades básicas de la esperanza condicional

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(g(z)h(A)|\mathcal{F}) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(g(Z)h(A)|\mathcal{F} \vee \sigma(Z))|\mathcal{F}) \\
 &= \mathbb{E}(g(Z)\mathbb{E}(h(A)|\mathcal{F} \vee \sigma(Z))|\mathcal{F}) \\
 &= \mathbb{E}(g(Z)\mathbb{E}(h(A))|\mathcal{F}) \\
 &= \mathbb{E}(g(Z)|\mathcal{F})\mathbb{E}(h(A)).
 \end{aligned}$$

Con lo que se tiene el resultado.

- iii) Justifique la identidad casi segura:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{1}_{\{X_{n+1}=j\}} &= \mathbf{1}_{\{X_n=j+1, A_n=0, Z_n=1\}} \\
 &\quad + \mathbf{1}_{\{X_n=j, A_n=0, Z_n \neq 1\}} + \mathbf{1}_{\{X_n=j, A_n=1, Z_n=0\}} \\
 &\quad + \mathbf{1}_{\{X_n=j-1, A_n=1, Z_n \neq 0\}} \\
 &\quad + \sum_{k \geq 2} \mathbf{1}_{\{X_n=j-k, A_n=k\}}
 \end{aligned}$$

Luego, calcule $\mathbb{P}(X_{n+1} = j | \mathcal{F}_n)$ y deduzca que (X_n) es cadena de Markov homogénea irreducible con matriz de transición P dada por

$$p_{ij} = \begin{cases} b_1(i)a_0 & \text{si } j = i - 1, \\ (1 - b_1(i))a_0 + b_0(i)a_1 & \text{si } j = i, \\ (1 - b_0(i))a_1 & \text{si } j = i + 1, \\ a_{j-i} & \text{si } j \geq i + 2. \end{cases}$$

- iv) Suponga que existe una medida invariante $\pi = (\pi(n))_{n \in \mathbb{N}}$ para P y escriba la ecuación que satisface. Luego, muestre que $q_N := \sum_{i=0}^N \pi(i)$ satisface

$$q_N = \pi(N)b_0(N)a_1 + \pi(N+1)b_1(N+1)a_0 + \sum_{k=0}^N a_k q_{N-k}.$$

Deduzca que

$$q_N(1 - a_0) \leq \pi(N)b_0(N)a_1 + \pi(N+1)b_1(N+1)a_0 + q_{N-1}(1 - a_0)$$

y que

$$\frac{\pi(N+1)}{\pi(N)} \geq \frac{1 - a_0 - b_0(N)a_1}{b_1(N+1)a_0}.$$

Solución:

Primero veamos las ecuaciones de las probabilidades estacionarias:

$$\pi(0) = \pi(0)(a_0 + a_1) + \pi(1)a_0b_1(1) = \pi(0)a_1b_0(0) + \pi(1)b_1(1)a_0 + \pi(0)a_0,$$

$$\begin{aligned} \pi(N) &= \sum_{i=0}^N \pi(i)a_{N-i} - \pi(N-1)a_1b_0(N-1) - \pi(N)a_0b_1(N) \\ &\quad + \pi(N)a_1b_0(N) + \pi(N+1)a_0b_1(N+1), \end{aligned}$$

ahora probemos las ecuaciones de los q_N por inducción.

Es claro de la ecuación de $\pi(0)$ que q_0 cumple la ecuación. Supongamos ahora que hasta $N-1$ se tiene. Ahora

$$\begin{aligned} q_N &= \pi(N) + q_{N-1} \\ &= \pi(N) + \pi(N-1)b_0(N-1)a_1 + \pi(N)b_1(N)a_0 + \sum_{k=0}^{N-1} a_k q_{N-1-k} \\ &= \sum_{i=0}^N \pi(i)a_{N-i} - \pi(N-1)a_1b_0(N-1) - \pi(N)a_0b_1(N) \\ &\quad + \pi(N)a_1b_0(N) + \pi(N+1)a_0b_1(N+1) \\ &\quad + \pi(N-1)b_0(N-1)a_1 + \pi(N)b_1(N)a_0 + \sum_{k=0}^{N-1} a_k q_{N-1-k} \\ &= \pi(N)b_0(N)a_1 + \pi(N+1)b_1(N+1)a_0 + \sum_{k=0}^N a_k q_{N-k}. \end{aligned}$$

Ahora, como los q_N son crecientes

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N a_k q_{N-k} &= \sum_{k=1}^N a_k q_{N-k} + a_0 q_N \\ &\leq q_{N-1} \sum_{k=1}^N a_k + a_0 q_N \\ &\leq q_{N-1} \sum_{k=1}^{\infty} a_k + a_0 q_N \\ &= q_{N-1}(1 - a_0) + a_0 q_N, \end{aligned}$$

luego concluimos que

$$q_N(1 - a_0) \leq \pi(N)b_0(N)a_1 + \pi(N+1)b_1(N+1)a_0 + q_{N-1}(1 - a_0),$$

y

$$\frac{\pi(N+1)}{\pi(N)} \geq \frac{1 - a_0 - b_0(N)a_1}{b_1(N+1)a_0}.$$

- v) Supondremos ahora que, condicionalmente a $\{X_n = i\}$, cada uno de los i mensajes esperando en la cola intenta usar el canal en instante $n+1$ con probabilidad $\nu \in (0, 1)$, independientemente de los demás $i-1$. Pruebe que bajo este supuesto, el protocolo es inestable.

Solución:

De la condición se tiene que $b_k(i) = \binom{i}{k} \nu^k (1-\nu)^{i-k}$, con lo que

$$\frac{\pi(N+1)}{\pi(N)} \geq \frac{1 - a_0 - b_0(N)a_1}{b_1(N+1)a_0} \longrightarrow \infty, \text{ pues } a_0 < 1.$$

Con esto se contradice el hecho que $\sum_{n \geq 0} \pi(n) = 1$, por lo que no pueden existir probabilidades estacionarias.

P2. Criterio de Foster para recurrencia positiva

Sea E un conjunto numerable. El objetivo de este problema es probar el siguiente resultado:

Teorema (Foster)

Sea (X_n) cadena de Markov homogénea a valores en E con matriz de transición P irreducible. Suponga que existen una función $h : E \rightarrow \mathbb{R}_+$, un conjunto **finito** $F \subseteq E$, y $\varepsilon > 0$ tales que

$$\sum_{k \in E} p_{ik} h(k) < \infty \quad \text{para todo } i \in F \quad \text{y}$$

$$\sum_{k \in E} p_{ik} h(k) \leq h(i) - \varepsilon \quad \text{para todo } i \notin F.$$

Entonces (X_n) es recurrente positiva.

- i) Sea $\tau = \inf\{n \geq 1 : X_n \in F\}$ y defina $Y_n = h(X_n) \mathbf{1}_{\{\tau > n\}}$. Pruebe que para $i \notin F$, $\mathbb{P}_i$ casi seguramente se tiene

$$\mathbb{E}_i(Y_{n+1} | \mathcal{F}_n) \leq \mathbb{E}_i(h(X_{n+1}) \mathbf{1}_{\{\tau > n\}} | \mathcal{F}_n) \leq Y_n - \varepsilon \mathbf{1}_{\{\tau > n\}}.$$

Muestre que $\mathbb{E}_i(Y_n) < \infty$ y deduzca que de lo anterior que

$$\mathbb{E}_i(\tau) \leq \varepsilon^{-1} h(i) \quad \forall \quad i \notin F.$$

Solución:

Es claro que $\{\tau > n+1\} \subseteq \{\tau > n\}$, por lo que $\mathbf{1}_{\{\tau > n+1\}} \leq \mathbf{1}_{\{\tau > n\}}$, luego por monotonía de la esperanza condicional $\mathbb{E}_i(Y_{n+1} | \mathcal{F}_n) \leq \mathbb{E}_i(h(X_{n+1}) \mathbf{1}_{\{\tau > n\}} | \mathcal{F}_n)$. Ahora, como τ es tiempo de parada $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ y por lo tanto $\mathbf{1}_{\{\tau > n\}}$ es $\mathcal{F}_n$ medible, con lo que

$$\mathbb{E}_i(h(X_{n+1}) \mathbf{1}_{\{\tau > n\}} | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}_i(h(X_{n+1}) | \mathcal{F}_n) \mathbf{1}_{\{\tau > n\}}.$$

Al ser (X_n) cadena de Markov

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_i(h(X_{n+1})|\mathcal{F}_n)\mathbf{1}_{\{\tau>n\}} &= \mathbb{E}_{X_n}(h(X_1))\mathbf{1}_{\{\tau>n\}} \\
 &= \sum_{j \in E} \mathbb{E}_j(h(X_1))\mathbf{1}_{\{X_n=j\}}\mathbf{1}_{\{\tau>n\}} \\
 &= \sum_{j \notin F} \mathbb{E}_j(h(X_1))\mathbf{1}_{\{X_n=j\}}\mathbf{1}_{\{\tau>n\}} \\
 &= \sum_{j \notin F} \left(\sum_{k \in E} h(k)p_{jk} \right) \mathbf{1}_{\{X_n=j\}}\mathbf{1}_{\{\tau>n\}} \\
 &\leq \sum_{j \notin F} (h(j) - \varepsilon) \mathbf{1}_{\{X_n=j\}}\mathbf{1}_{\{\tau>n\}} \\
 &= \sum_{j \in E} (h(j) - \varepsilon) \mathbf{1}_{\{X_n=j\}}\mathbf{1}_{\{\tau>n\}} \\
 &= (h(X_n) - \varepsilon) \mathbf{1}_{\{\tau>n\}} \\
 &= Y_n - \varepsilon \mathbf{1}_{\{\tau>n\}}.
 \end{aligned}$$

Tomando esperanza

$$\mathbb{E}_i(Y_{n+1}) = \mathbb{E}_i(\mathbb{E}_i(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n)) \leq \mathbb{E}_i(Y_n) - \varepsilon \mathbb{P}_i(\tau > n) \leq \mathbb{E}_i(Y_n).$$

Como $\mathbb{E}_i(Y_0) = h(i) < \infty$, $\mathbb{E}_i(Y_n) < \infty$ para todo $i \notin F$.

Como el límite de $\mathbb{E}_i(Y_n)$ es decreciente y h positivo, $\lim \mathbb{E}_i(Y_n) = c \geq 0$, y por lo tanto $\mathbb{E}_i(Y_n) - \mathbb{E}_i(Y_{n+1}) \geq \varepsilon \mathbb{P}_i(\tau > n)$, sumando en $n \geq 0$, obtenemos

$$\varepsilon \mathbb{E}_i(\tau) \leq \mathbb{E}_i(Y_0) - c \leq \mathbb{E}_i(Y_0) = h(i).$$

ii) Sea $\mathbf{j} \in \mathbf{F}$. Pruebe que

$$\mathbb{E}_j(\tau) = 1 + \sum_{i \notin F} p_{ji} \mathbb{E}_i(\tau)$$

y deduzca que

$$\mathbb{E}_j(\tau) < \infty.$$

Concluya el resultado deseado.

Solución:

Definamos primero la función $f(i_1, i_2, \dots) = \inf\{j \geq 1 : i_j \in F\} + 1$, y notemos

que $\tau \mathbf{1}_{\{X_1 \notin F\}} = f(X_2, X_3, \dots) \mathbf{1}_{\{X_1 \notin F\}}$. Así

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_j(\tau) &= \mathbb{E}_j(\tau \mathbf{1}_{\{X_1 \in F\}} + \tau \mathbf{1}_{\{X_1 \notin F\}}) \\
 &= \mathbb{E}_j(\mathbf{1}_{\{X_1 \in F\}}) + \mathbb{E}_j(\tau \mathbf{1}_{\{X_1 \notin F\}}) \\
 &= \mathbb{P}_j(X_1 \in F) + \mathbb{E}_j(\mathbb{E}_j(\tau \mathbf{1}_{\{X_1 \notin F\}} | X_1)) \\
 &= \mathbb{P}_j(X_1 \in F) + \mathbb{E}_j(\mathbb{E}_j(f(X_2, X_3, \dots) \mathbf{1}_{\{X_1 \notin F\}} | X_1)) \\
 &= \mathbb{P}_j(X_1 \in F) + \mathbb{E}_j(\mathbb{E}_j(f(X_2, X_3, \dots) | X_1) \mathbf{1}_{\{X_1 \notin F\}}) \\
 &= \mathbb{P}_j(X_1 \in F) + \mathbb{E}_j(\mathbb{E}_{X_1}(f(X_1, X_2, \dots)) \mathbf{1}_{\{X_1 \notin F\}}) \\
 &= \mathbb{P}_j(X_1 \in F) + \mathbb{E}_j((1 + \mathbb{E}_{X_1}(\tau)) \mathbf{1}_{\{X_1 \notin F\}}) \\
 &= \mathbb{P}_j(X_1 \in F) + \mathbb{P}_j(X_1 \notin F) + \mathbb{E}_j\left(\sum_{i \notin F} \mathbb{E}_i(\tau) \mathbf{1}_{\{X_1=i\}}\right) \\
 &= 1 + \sum_{i \notin F} \mathbb{E}_j(\mathbb{E}_i(\tau) \mathbf{1}_{\{X_1=i\}}) \\
 &= 1 + \sum_{i \notin F} \mathbb{E}_i(\tau) p_{ji}.
 \end{aligned}$$

Así por la parte anterior

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_j(\tau) &= 1 + \sum_{i \notin F} \mathbb{E}_i(\tau) p_{ji} \\
 &\leq 1 + \sum_{i \notin F} (\varepsilon^{-1} h(i)) p_{ji} \\
 &\leq 1 + \varepsilon^{-1} \sum_{i \in E} p_{ji} h(i) < \infty,
 \end{aligned}$$

por hipótesis.

Finalmente por la tarea se concluye que (X_n) es recurrente positiva.

A continuación, se aplicará el teorema de Foster a la cadena de Markov (estudiada en clase auxiliar) definida por:

$$X_{n+1} = (X_n - 1)_+ + Z_n,$$

donde las (Z_n) son variables aleatorias en $\mathbb{N}$ i.i.d. e independientes de X_0 . Se demostrará que si $\mathbb{E}(Z_n) < 1$, la cadena es recurrente positiva.

iv) Pruebe que para todo $i \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}_i(X_1) < \infty$$

y que para i suficientemente grande,

$$\mathbb{E}_i(X_1) < i - \varepsilon$$

para cierto $\varepsilon > 0$ (que no depende de i). Concluya el resultado.

Solución:

Sea $h = id$, es decir $h(i) = i, \forall i \in \mathbb{N}$. Así

$$\sum_{k \in E} p_{ik} h(k) = \sum_{k \in E} p_{ik} k = \mathbb{E}_i(X_1) = \mathbb{E}_i((i - 1)_+ + Z_0) = (i - 1)_+ + \mathbb{E}(Z_0) < \infty$$

De este mismo modo para $i \geq 2$, $(i-1)_+ = (i-1)$, con lo que si $F = 0,1$ y $\varepsilon = (1 - \mathbb{E}(Z_0))/2 > 0$, para todo $i \notin F$ se va a tener

$$\sum_{k \in E} p_{ik} h(k) = \sum_{k \in E} p_{ik} k = \mathbb{E}_i(X_1) < i - \varepsilon = h(i) - \varepsilon,$$

por lo que gracias al teorema de Foster se concluye que (X_n) es recurrente positiva.

Observación: Se probó en auxiliar que (X_n) no puede ser recurrente positiva si $\mathbb{E}(Z_n) \geq 1$. Luego, (X_n) es recurrente positiva ssi $\mathbb{E}(Z_n) < 1$.