Tarea 1. Procesos de Markov. Julio 2007

Profesor: Joaquín Fontbona
Auxiliares: Aitor Aldunate.

Problema I: Teorema de clase monótona funcional
Sea X un conjunto y $\mathbb{B}(X)$ el espacio de funciones acotadas $f : X \to \mathbb{R}$.

a) Sea $H \subseteq \mathbb{B}(X)$ un subespacio vectorial tal que

   i) H contiene a las constantes

   ii) Para toda sucesión creciente $\{f_n\}$ de elementos de H tal que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{x\in X} |f_n(x)| < \infty$ se tiene que $f := \lim_{n\to\infty} f_n \in H$.

   Sea $\mathcal{C}$ una clase de subconjuntos de X cerrada para intersección y suponga que $H \supseteq \{\mathbf{1}_A : A \in \mathcal{C}\}$. Pruebe que H contiene a $\{f \in \mathbb{B}(X) : f \text{ es } \sigma(\mathcal{C}) - \beta(\mathbb{R}) - \text{medible }\}$.

b) Sea F un conjunto de funciones a valores reales definidas en X. Se define la tribu generada por F por

$$\sigma(F) := \sigma(\{f^{-1}(C) : f \in F, C \in \beta(\mathbb{R})\}).$$

   Pruebe que

$$\sigma(F) = \sigma(\{\cap_{i=1}^k f_i^{-1}(C_i) : f_i \in F, C_i \in \beta(\mathbb{R}), k \in \mathbb{N}\}),$$

   y que si $\mathcal{D}$ es una clase que genera $\beta(\mathbb{R})$, entonces

$$\sigma(F) = \sigma(\{\cap_{i=1}^k f_i^{-1}(C_i) : f_i \in F, C_i \in \mathcal{D}, k \in \mathbb{N}\}).$$

c) Sea $H \subseteq \mathbb{B}(X)$ como en la parte *a)* y satisfaciendo además

   iii) H es cerrado para la convergencia uniforme

   Suponga que $H_0 \subseteq H$ es un subconjunto cerrado para multiplicación. Se probará que H contiene a $\{f \in \mathbb{B}(X) : f \text{ es } \sigma(H_0) - \beta(\mathbb{R}) - \text{medible }\}$.

   1) Verfique que para todo polinomio p y toda $f \in H_0$ se tiene $p(f) \in H$. Deduzca que para toda función continua $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se tiene $\phi(f) \in H$ para toda $f \in H_0$.

   2) Ayudandose de la sucesión de funciones $\phi_n(y) := [1 \wedge ((y - a) \vee 0)]^{\frac{1}{n}}$, muestre que para cada $a \in \mathbb{R}$, se tiene $\mathbf{1}_{\{f>a\}} \in H$. Pruebe también que para todo $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$, y $f_1, \dots, f_k \in H_0$, se tiene $\mathbf{1}_{\{f_1>a_1,\dots,f_k>a_k\}} \in H$.

   3) Pruebe el resultado deseado.