

P2) a) $X = \{x = (x_k)_{k \geq 1} \mid (k \cdot x_k)_{k \geq 1} \in \ell^1\}$ PD) $X \subseteq \ell^1$

Sea $x \in X \rightarrow \sum_{k \geq 1} k \cdot |x_k| < \infty$. Luego:

$$\sum_{k \geq 1} |x_k| \leq \sum_{k \geq 1} k \cdot |x_k| < \infty \quad \therefore (x_k)_{k \geq 1} \in \ell^1$$

OBS.: Es fácil ver que X es e.v. también. $\therefore X$ es s.e.v. de ℓ^1

$T: X \rightarrow \ell^1$ $T(x) = (k \cdot x_k)_{k \geq 1}$

• Linealidad: Evidente

• Grafo cerrado: Probaremos que $\text{Gr}(T)$ es cerrado en $\ell^1 \times \ell^1$

Sea $(x^m)_{m \in \mathbb{N}} \subset X$ [OBS.: $x^m = (x_k^m)_{k \geq 1}$] $x^m \xrightarrow{\|\cdot\|_1} x$, $T(x^m) \xrightarrow{\|\cdot\|_1} y$

$$(*) \sum_{k \geq 1} k \cdot |x_k^m - y_k| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

Notar que $(*)$ implica: $k \cdot x_k^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} y_k \quad \forall k \geq 1$

y que $x^m \rightarrow x$ implica: $x_k^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} x_k \quad \forall k \geq 1$

$$\therefore y_k = k \cdot x_k$$

$$\Rightarrow (k \cdot x_k)_{k \geq 1} \in \ell^1$$

$$\text{es } y \in X \text{ y } T(x) = y //$$

$\text{Sup } (X, \|\cdot\|_1)$ completo, entonces $T: X \rightarrow \ell^1$ posee grafo cerrado y por Tec. del Grafo. cerrado $T \in \text{LC}(X, \ell^1)$. Probaremos que $T \notin \text{LC}$:

Recordemos que $\ell^1 = \{x \in \ell^1 \mid \exists k_0 (\forall k > k_0) x_k = 0\} \subset X$

Sup. que $\|T\| = M$, tomando $x = e_i = (0, 0, \dots, \overset{i}{1}, 0, 0, \dots)$ tenemos:

$$1 = \|e_i\| \text{ y } \|Tx\| = i \cdot 1 \nearrow \infty \text{ si } i \rightarrow \infty$$

b) $(c_k)_{k \in \mathbb{C}} \cdot \sum_k c_k x_k$ converge $\forall (x_k)_{k \geq 1} \in \ell^p$

$l: \ell^p \rightarrow \mathbb{C}$ es un operador lineal. Probemos que $(x_k)_{k \in \mathbb{C}} \in \ell^{p^*}$

Definamos $l_n: \ell^p \rightarrow \mathbb{C}$ por $l_n(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$

Para x fijo en ℓ^p : $l_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} c_j x_j \in \mathbb{C} \quad (*)$

Por un corolario de B-S, existe un límite fuerte en $(\ell^p)^*$

$$\text{Por } (*): \quad l(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} l_n(x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j x_j \quad \text{y } l \in (\ell^p)^* //$$

(c) $(C_{mk})_{mk} \in \mathbb{C}^{N \times N}$
 $\forall x \in \ell^p \quad \forall m \geq 1 \quad y_m = \sum_{k=1}^{\infty} C_{mk} x_k$ existe e $y = (y_m)_{m \geq 1} \in \ell^r$

Definamos $T_m: \ell^p \rightarrow \ell^r$ tal $T_m(x)_n = \begin{cases} \sum_{k=1}^m C_{nk} x_k & n \leq m \\ 0 & n > m \end{cases}$

Notar que $T_m \in LC(\ell^p, \ell^r)$ por (b) (H) y $T_m(x) \rightarrow (y_m)_{m \geq 1}$ en ℓ^r .

Por B-S T_m converge fuerte a T , y por lo anterior

$$T(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} T_m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} C_{nk} x_k$$

$T \in LC(\ell^p, \ell^r)$

(H) ojo que se trata de una cantidad finita de componentes, por eso $\in LC$.

P3 (a) $\|T\| = \sup_{x \in B_B} \|Tx\|_{\ell^r} = \sup_{x \in B_B} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |Tx_i|^p \right)^{1/p}$. Acotamos:

$$|Tx_i| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} C_{ik} x_k \right| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |C_{ik}|^q \right)^{1/q} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p}$$

$$\therefore \|T\| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |C_{ik}|^q \right)^{p/q} \right)^{1/p}$$

(b) Planteamos la ec. $Tx = b$

$$\Rightarrow -Tx = -b \Rightarrow (I-T)x = x - b$$

$$A(x) = (I-T)x + b = x$$

$\hookrightarrow$ operador

$\hookrightarrow$ Pto. Fijo

Veamos si $A(\cdot)$ es contractante:

$$\|A(x_1) - A(x_2)\|_{\ell^p} = \|(I-T)(x_1 - x_2)\|_{\ell^p} \leq \|I-T\| \cdot \|x_1 - x_2\|$$

Por hipótesis $\|I-T\| < 1$

$\therefore$ (S) posee una única solución

Sea $S: \ell^p \rightarrow \ell^p$ $S(b)$ es la solución de (S). Por la unicidad

se prueba la linealidad:

$$\begin{aligned} (I-T)S(b_1) + b_1 &= S(b_1) \\ (I-T)S(\lambda b_2) + \lambda b_2 &= S(\lambda b_2) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} (I-T)(S(b_1) + S(\lambda b_2)) &= S(b_1) + \lambda S(b_2) \\ S(\lambda b_2) &= \lambda S(b_2) \end{aligned}$$

Unicidad

La continuidad es directa; pues notamos que la inversa de S es $T(LC)$ y por Teo. de la aplicación abta. $T^{-1} = S$ es continua (OJO: para usar esto era necesario verificar previamente que T era invertible)

P3) $a \in C \subset H$ convexo cerrado y acotado. $T: C \rightarrow C$

a) $T_m(x) = \frac{1}{m+1}a + \frac{m}{m+1}T(x)$. Veamos que es contracción:

$$|T_m(x) - T_m(y)| = \frac{m}{m+1} |T(x) - T(y)| \leq \frac{m}{m+1} |x - y|$$

$\underbrace{\frac{m}{m+1}}_{< 1}$

Por Tes. del Pto. Fijo de Banach, $\exists! x_m \in C$ tal $T_m(x_m) = x_m$

oso: $T_m(x) = \lambda a + (1-\lambda)b$ $a, b \in C \Rightarrow T_m: C \rightarrow C$, y C m. completo

b) $x_{nk} \rightarrow x$. PD $|x_m - a|^2 \leq \frac{2m}{2m+1} \langle x_m - a, x - a \rangle$

Por a): $\frac{1}{m+1}a + \frac{m}{m+1}T(x_m) = x_m$

$$\Rightarrow a + mT(x_m) = (m+1)x_m$$

$$\Rightarrow T(x_m) = \frac{(m+1)}{m}x_m - \frac{1}{m}a$$

$$T(x_m) = a + \frac{(m+1)}{m}(x_m - a)$$

$$\Rightarrow T(x_m) - T(x_{nk}) = \frac{m+1}{m}(x_m - a) - \frac{nk+1}{nk}(x_{nk} - a)$$

$$\Rightarrow \|T(x_m) - T(x_{nk})\|^2 = \frac{(m+1)^2}{m^2} \|x_m - a\|^2 - 2 \left(\frac{m+1}{m} \right) \left(\frac{nk+1}{nk} \right) \langle x_m - a, x_{nk} - a \rangle + \frac{(nk+1)^2}{nk^2} \|x_{nk} - a\|^2$$

$\therefore$ Por no expansividad de T :

$$\frac{(m+1)^2}{m^2} \|x_m - a\|^2 + \frac{(nk+1)^2}{nk^2} \|x_{nk} - a\|^2 - 2 \left(\frac{m+1}{m} \right) \left(\frac{nk+1}{nk} \right) \langle x_m - a, x_{nk} - a \rangle \leq \|x_m - x_{nk}\|^2$$

$$\Rightarrow \text{Pero } \|x_m - x_{nk}\|^2 = \|x_m - a\|^2 - 2 \langle x_m - a, x_{nk} - a \rangle + \|x_{nk} - a\|^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{(m+1)^2}{m^2} - 1 \right) \|x_m - a\|^2 + \underbrace{\left(\frac{(nk+1)^2}{nk^2} - 1 \right)}_{\text{mala}} \|x_{nk} - a\|^2 \leq \underbrace{2 \left(\frac{m+1}{m} \right) \left(\frac{nk+1}{nk} \right)}_{\text{acotada}} \langle x_m - a, x_{nk} - a \rangle$$

Ahora podemos tomar $\lim_{k \rightarrow \infty}$

$$\left(\frac{(m+1)^2}{m^2} - 1 \right) \|x_m - a\|^2 + 0 \leq 2 \left(\frac{m+1}{m} \right) \langle x_m - a, x - a \rangle$$

$$\|x_m - a\|^2 \leq 2 \left(\frac{1}{m} \right) \left(\frac{m^2}{1+2m} \right) \langle x_m - a, x - a \rangle$$

$$\therefore \|x_m - a\|^2 \leq \frac{2m}{2m+1} \langle x_m - a, x - a \rangle$$

$$(c) \quad |x_{nk} - a|^2 \leq \frac{2nk}{2nk+1} \langle x_{nk} - a, x - a \rangle$$

$$\begin{aligned} |x_{nk} - x|^2 &= |x_{nk} - a + (a - x)|^2 = |x_{nk} - a|^2 + 2 \langle x_{nk} - a, a - x \rangle + |a - x|^2 \\ &\leq \left(2 + \frac{2nk}{2nk+1}\right) \underbrace{\langle x_{nk} - a, x - a \rangle}_{|x - a|^2} + |a - x|^2 \\ &\quad \rightarrow 1 \end{aligned}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_k |x_{nk} - x|^2 \leq (1) |x - a|^2 + |x - a|^2 = 0$$

$$\therefore x_{nk} \rightarrow x //$$

$$(d) \quad x_t = tx + (1-t)y \quad x, y \in F: \quad \text{PR } x_t \in F$$

$$\begin{aligned} |x - x_t| &= (1-t)|x - y| \quad |x_t - y| = t|x - y| \\ \Rightarrow |x - x_t| + |x_t - y| &= (1-t+t)|x - y| \Rightarrow |x - y| \quad (*) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |x - y| = |x - T(x_t)| + |T(x_t) - y|, \text{ pues}$$

$$\begin{aligned} |x - y| &\leq |x - T(x_t)| + |T(x_t) - y| = |T(x) - T(x_t)| + |T(x_t) - T(y)| \\ &\leq |x - x_t| + |x_t - y| = |x - y| // \end{aligned}$$

$$\cancel{|x - y| \leq |x - T(x_t)| + |T(x_t) - y|}$$

Recordamos que por C-S si $\|a+b\| = \|a\| + \|b\| \Rightarrow a$ y b son colineales
i.e. $\exists \lambda, \mu$ t.a $\lambda a = \mu b \quad (\lambda, \mu > 0)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lambda(x - T(x_t)) &= \mu(T(x_t) - y) \\ \Rightarrow \lambda x + \mu y &= (\lambda + \mu) T(x_t) \Rightarrow \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)x + \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}\right)y = T(x_t) \end{aligned}$$

Es decir, $T(x_t) \in \text{co}(x, y)$, de esto y de (*) es claro que $T(x_t) = x_t$ pero podemos probarlo:

$$\begin{aligned} (1-\alpha)\|x - y\| &= \|T(x_t) - x\| \leq \|x_t - x\| = (1-t)\|x - y\| \Rightarrow 1-\alpha \leq 1-t \Rightarrow t \leq \alpha \\ \alpha\|x - y\| &= \|T(x_t) - y\| \leq \|x_t - y\| = t\|x - y\| \Rightarrow \alpha \leq t \end{aligned}$$

$$\therefore \alpha = t \Rightarrow x_t = T(x_t) \therefore x_t \in F //$$

Así se prueba que F es convexo, además es no vacío pues al ser C débil compacto, podemos extraer una subsuc de x_n que sea débil convergente, lo que por b) y c) nos dice que $\exists x$ t.a $x \in F$.

Finalmente C cerrado pues $F = (I - T)^{-1} \{0\}$

$\downarrow$ continua $\downarrow$ Cerrado