

MA38B – Ejercicio 2 – 2007

Prof: R. Cominetti

Auxs: C. Guzmán, F. Olmos

P1) Sea X evn de dimensión infinita, pruebe que si X^* es separable entonces X también, para ello :

1. Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ denso en X^* . Demuestre la existencia de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ unitarios tales que $|f_n(x_n)| \geq \frac{1}{2} \|f_n\|$.
2. Demuestre que $\langle \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \rangle$ es denso en X . *Hint:* Proceda por contradicción y utilice un corolario de HB.
3. Concluya.

P2) Probaremos ahora que el recíproco no es cierto. Para esto consideramos el espacio l^1 y probaremos que su dual se identifica con l^∞ , proponiendo la isometría:

$$\begin{aligned}\Phi : l^\infty &\longrightarrow (l^1)^* \\ a = (a_i)_{i \in \mathbb{N}} &\longrightarrow \varphi_a\end{aligned}$$

con $\varphi_a(x_i)_i = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i x_i$. Pruebe que:

1. $\varphi_a \in (l^1)^*$ y que Φ es una isometría.
2. Pruebe que es sobreyectiva. Para esto se recomienda construir una preimagen de un elemento $x' \in (l^1)^*$ a través de sus evaluaciones sobre la base canónica $a_i := x'(e_i)$, probar que esto entrega una sucesión a acotada y argumentando sobre un denso apropiado concluir que $\Phi(a) = x'$.
3. Con esto observe que Φ es la identificación entre ambos espacios, y asumiendo que l^∞ no es separable concluya .

TAREA/BONUS : Demuestre que l^∞ no es separable. (No intente hacerlo en el tiempo del ejercicio, plazo hasta el Lunes 12 de noviembre, quienes entreguen la demostración tendrán un punto adicional en uno de los ejercicios).

Tiempo: 1.5 horas

Sin resumen

Sin apuntes