AUXILIAR MA38B

P1 Sea E Banach de dimensión infinita. Pruebe que E no puede poseer una base de Hamel numerable

Por contradicción, supongamos que sí, ie $\exists \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ tq:

- Si $|I|$ es finito: $\sum_{i\in I} \lambda_i \cdot e_i = 0 \quad (\lambda_i \in \mathbb{K}) \Rightarrow \lambda_i = 0 \ \forall i \in I$
- Si $x\in E$: $\exists I$ tq $|I| < +\infty$ $\{\lambda_i\}_{i\in I} \subseteq \mathbb{K}$ tq $x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$

Consideramos ahora $E_n = \langle \{e_1, \dots, e_n\} \rangle$ $n\in\mathbb{N}$, veamos que:

- $\underline{\forall n\in\mathbb{N}, \ E_n \text{ es cerrado de interior vacío.}}$

1. <u>E_n es cerrado</u>: Sea $(x_k)_k \subseteq E_n$ $x_k \to x$ (PD) $x\in E_n$

Notamos que $\forall k\in\mathbb{N}$ $x_k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k e_i$ y $x = \sum_{j\in J} \mu_j e_j$

$$\|x_k - x\| = \|\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k e_i - \sum_{j\in J} \mu_j e_j}\| \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

Si $\exists j_0 \in J$ tq $j_0 \notin \{1, \dots, n\}$ y $\mu_{j_0} \neq 0$. definiendo: $\delta_k = \sum \lambda_i^k e_i - \sum \mu_j e_j$

Tenemos que $\delta_k = \sum_{\{1\dots n\}\cup J} \gamma_i^k \cdot e_i$, con $\gamma_{j_0}^k = -\mu_{j_0} \neq 0$

Tenemos que $\delta_\infty = \lim_{k\to\infty} \delta_k$ tiene como componente j_0 a $\mu_0 \neq 0$

$\therefore J \subseteq \{1, \dots, n\} \Rightarrow x \in E_n$

2. <u>$\mathrm{int}(E_n) = \emptyset$</u>: Sea $x\in E_n$ y $B(x,\epsilon)$. Notamos que si $j > n$,

$$x + \frac{\epsilon}{2} \cdot e_j \in B(x,\epsilon) \setminus E_n$$

- $\underline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = E}$: Sea $x\in E$: $x = \sum_{j\in J} \mu_j e_j$, como $|J| < +\infty$, $\exists N$ tq $J \subseteq \{1, \dots, N\}$. Luego $x \in E_N$.

Entonces, E es la unión de cerrados de interior vacío $\Rightarrow\Leftarrow$ con Baire, pues E es completo ■

P2 1. Sea Y e.m. y X s.e. de Y compacto. Definimos $C_b(Y)$ el e.v. de las fcs. continuas y acotadas de Y a valores en $\mathbb{K}$, dotado de:

$$\|f\| = \sup_{y\in Y} |f(y)| \qquad \Phi(f) = f|_X$$

a) Pruebe que $C_b(Y)$ es un espacio de Banach

b) Pruebe que si $f\in C(Y)$, existe un elemento $\tilde{f} \in C_b(Y)$ tq $\Phi(\tilde{f}) = \Phi(f)$ y $\|\tilde{f}\| = \|\Phi(f)\|$.

c) Pruebe que $\mathrm{Im}\,\Phi$ es densa en $C(X)$

d) Sea $g\in C(X)$, límite uniforme de $(\Phi(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$

i. Pruebe que es posible extraer una subsucesión, tq:

$$(\forall k\in\mathbb{N}) \quad \|\Phi(f_{n_{k+1}}) - \Phi(f_{n_k})\| \leq 2^{-n}$$

Fecha / Date:

ii. Pruebe que la serie $\tilde{f}_0 + \sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{f}_{m_{k+1}} - \tilde{f}_{m_k})$ converge en $C_b(Y)$. Llamaremos f a tal límite.

iii. Pruebe que $\Phi(f) = g$

e) Deduzca que toda fc $g \in C(X)$ admite una prolongación a una fc $f \in C_b(Y)$ tq $\|f\| = \|g\|$

2. Sea (Y, d) un e.m. y A sbcjto no vacío de Y. Sea $f: A \to \mathbb{R}$, lipschitziana de cte. C. Dende:

$$\forall y \in Y \qquad g(y) = \inf_{x \in A} [f(x) + C d(x,y)]$$

Pruebe que g es una prolongación de f lipschitziana de cte. C.

Sol.:

1 a) Es fácil ver que es un e.v., así como ver que $\|\cdot\|$ es una norma.
Para la completitud, recordamos que el límite uniforme de fcs. continuas es continua. Sea $(f_n)_n \subseteq C_b(X,Y)$ de Cauchy.
Es evidente que $f_n(x) \longrightarrow f(x) \in \mathbb{R}$. Lo que define $f: Y \to \mathbb{R}$, que por el recuerdo será continua.
Para ver que es acotada: $(\forall x \in Y)$ $\quad |f(x)| = \lim_{n\to\infty} \underbrace{|f_n(x)|}_{\|f_n\|} \leq \underbrace{\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|}_{=K<+\infty}$
pues $\|f_n\|$ converge:

$$\|f_n\| \leq \underbrace{\|f_n - f_{N_0}\|}_{\text{acot si } N_0 \text{ suf. grande}} + \|f_{N_0}\| < M \qquad \forall n \geq N_0$$

b) Si $\Phi(f) \equiv 0$, entonces $\tilde{f} = 0$ nos sirve.
Si $\Phi(f) \neq 0$, consideramos $\boxed{\tilde{f} = \chi\left(\frac{f}{\|\Phi(f)\|}\right) \cdot \|\Phi(f)\|}$ con $\chi: \mathbb{K} \to \mathbb{K}$
$\chi(x) = \frac{x}{\max(|x|,1)}$. Entonces χ es acotada por 1 y por ende $\tilde{f} \in C_b(Y)$.
Además, si $x \in X$ $\quad f(x) \leq \|\Phi(f)\| \Rightarrow \tilde{f}(x) = \left(\frac{\frac{f(x)}{\cancel{\|\Phi(f)\|}}}{1}\right) \cdot \|\Phi(f)\| = f(x)$
y como X es compacto, $\exists x \in X$ tq $\overset{|f(x)|}{\ } \ |f(x)| = \|\Phi(f)\|$. Por otra parte,
$|\tilde{f}(x)| \leq 1 \cdot \|\Phi(f)\|$, lo que implica que $\|\tilde{f}\| = \|\Phi(f)\|$

c) $\underline{\mathrm{Im}(\Phi) \text{ es subálgebra de}}$ $C(X)$: Es obvio que $\Phi(f+g) = \Phi(f) + \Phi(g)$, $\lambda f(g) = (\lambda f)g = f(\lambda g)$ y que $\Phi(f \cdot g) = \Phi(f) \cdot \Phi(g)$, con lo cual se observa que es un álgebra y está contenida en $C(X)$.
Probemos que es _separante_: sean $x, y \in X$, $x \neq y$ y: $\begin{array}{l} f: Y \to \mathbb{K} \\ t \mapsto d(x,t) \wedge 1 \end{array}$
Luego $(\Phi(f))(x) = f(x) = 0$ y $(\Phi(f))(y) \neq 0$.
Para ver que es _totalmente separante_, tomamos $y \in Y \setminus K$ y $\begin{array}{l} f: Y \to \mathbb{K} \\ t \mapsto d(y,t) \wedge 1 \end{array}$
Luego $\forall x \in X$ $\ (\Phi(f))(x) = f(x) = d(y,x) \wedge 1 > 0$

Finalmente, probamos que es autoconjugada. Sea $f \in C_b(Y) \Rightarrow \overline{f} \in C_b(Y)$ y además $\Phi(\overline{f}) = \overline{\Phi(f)}$. Luego, por S-W obtenemos que el espacio $Im(\Phi)$ es denso en $C(X)$.

d) i. Sea $n_0 = 0$ y $n_{k+1} = \min\{n > n_k : \|\Phi(f_{n_k}) - g\| \leq 2^{-k-2}\}$

$k=0$ | $\|\Phi(f_{n_{k+1}}) - \Phi(f_0)\| \leq \|\Phi(f_{n_1} - g)\| + \|\Phi(f_0 - g)\| \not\leq 2^{-k-1}$ no necesariamente lo cumple

Pero sí para todo $k \geq 1$

ii. Notemos que $\|(\tilde{f}_{n_{k+1}} - \tilde{f}_{n_k})\| = \|\Phi(f_{n_{k+1}} - f_{n_k})\| \leq 2^{n}$.

Luego la serie $\tilde{f}_0 + \sum (\tilde{f}_{n_{k+1}} - \tilde{f}_{n_k})$ es normalmente convergente $\Rightarrow$ es convergente en $C_b(Y)$ (Banach)

iii. Notamos que $\|\tilde{f}_0 + \sum_{k=0}^{m} \tilde{f}_{n_{k+1}} - \tilde{f}_{n_k} - f\| = \|\tilde{f}_{n_{m+1}} - f\| \longrightarrow 0$

$\therefore \tilde{f}_n \longrightarrow f$ uniformemente

En particular, converge puntualmente, ie: $\forall y \in Y$ $\lim_{n\to\infty} \tilde{f}_n(y) = f(y)$

$\forall x \in X$ $\tilde{f}_n(x) = f_n(x) = (\Phi(f_n))(x)$, y $(\Phi(f_n))(x) \longrightarrow g(x)$

Por unic. del límite: $\boxed{\Phi(f)(x) = g(x) \quad \forall x \in X}$ ☒

e) Sea $g \in C(X)$, por c) $\exists (f_n)_n \subseteq C_b(Y)$ tq $\Phi(f_n) \longrightarrow g$.

Y por d), $\exists f \subseteq C_b(Y)$ tq $\Phi(f) = g$

$\therefore \boxed{Im(\Phi) = C(X)}$ //

Además, por b) podemos considerar $\tilde{f}$ tq $\Phi(\tilde{f}) = \Phi(f) = g$ y $\|\tilde{f}\| = \|\Phi(f)\|$.

Con lo cual, probamos que $\exists \tilde{f}$ prolongación de g que preserva la norma.

OBS.: Esto implica que $f \longrightarrow \tilde{f}$ es una isometría entre $C(X)$ y $C_b(Y)$

2. Sean $x, y \in A$. Luego $f(y) \leq f(x) + C \cdot d(x,y) \Rightarrow f(y) \leq g(y)$

Además, si $y \in A$ $\quad g(y) \leq f(y) + C\,\cancel{d(y,y)} = f(y)$

$\therefore g(y) = f(y) \quad \forall y \in A$ ($\Rightarrow g$ es prolongación)

Ahora, si $x \in A$:

$$g(y) \leq f(x) + Cd(x,y) \leq f(x) + Cd(x,z) + Cd(z,y) \quad / \inf_{x\in A}$$

$$\left.\begin{array}{l} g(y) \leq g(z) + Cd(z,y) \\ \text{Repitiendo el argumento} \rightarrow g(z) \leq g(y) + Cd(z,y) \end{array}\right\} \boxed{|g(y) - g(z)| \leq Cd(z,y)}$$

$\therefore g$ es Lipschitz de cte. C ☒

P3) Sean X, Y espacios Hausdorff compactos. Pruebe que el e.v. generado por $\{f(x)\cdot g(y) \mid f \in C(X), g \in C(Y)\}$ es denso en $C(X \times Y)$.

Sol.:

Primero notamos que $X \times Y$ es Hausdorff compacto $\Rightarrow$ Normal (al igual para X e Y).

Para usar S-W necesitamos:

∴) Es álgebra: Por la estructura de e.v., la suma y el ponderación por escalar de elementos se mantiene dentro de D. Para el producto, basta ver que al multiplicar 2 polinomios de esa forma, distribuyendo se observa que no es más que una c.l. de elem en el generador.

∴) Es separante: Sean $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2) \overset{SPG}{\Rightarrow} x_1 \neq y_1$

Buscamos ahora $f \in C(X)$ que separe a x_1 con x_2.

Por Urysohn, $\exists f: X \to [0,1]$ continua tq $f(x_1) = 0 \wedge f(x_2) = 1$.

Finalmente la fc $g \equiv 1 \in C(Y)$. $\therefore f \cdot g \in D$ y separa a x_1 con x_2

∴) Es tot. separante: Análogamente por Urysohn (o bien $f \equiv 1, g \equiv 1$)

Luego D es una subálgebra densa en $C(X \times Y, \mathbb{R})$ //

P4) 1. $\prod_{\alpha \in A} Y_\alpha$ es AR ssi $\forall \alpha \in A$ Y_α es AR

$\Leftarrow$) Sea X normal y $A \subseteq X$ cerrado, sea $f: A \to \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha$ continua.

Luego $\pi_\alpha \circ f : A \to Y_\alpha$ es continua $\forall \alpha$, con lo cual posee una extensión $F_\alpha : X \to Y_\alpha$ continua.

Entonces
$$F: X \to \prod_{\alpha \in A} Y_\alpha, \quad x \mapsto \{F_\alpha(x)\}_{\alpha \in A}$$
es extensión continua de F

$\Rightarrow$) Sea $f: A \to Y_\beta$ continua. Consideremos $S_\beta : Y_\beta \to \prod_\alpha Y_\alpha$ un homeomorfismo en una fibra $\{y_\alpha^0\}_{\alpha \neq \beta} \times Y_\beta$. Luego:

$S_\beta \circ f : A \to \prod_\alpha Y_\alpha$ se puede extender a $F: X \to \prod_\alpha Y_\alpha$

Finalmente, como $\pi_\beta \circ S_\beta$ es la identidad (SPG), tenemos que $\pi_\beta \circ F$ es una extensión de f sobre X.

2. Sea $f: A \to S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ y consideremos su extensión $F: X \to \mathbb{R}^{n+1}$

Sea $U = \{x \mid F(x) \neq 0\}$ (OJO: es abto. y contiene a A). Definamos:

$$\hat{F}: U \to S^n, \quad x \mapsto \frac{F(x)}{|F(x)|}$$
es continua y extensión de F ∎