

MA38B Análisis. Semestre 2007-02

Profesor: Roberto Cominetti Auxiliares: Cristóbal Guzmán y Felipe Olmos

Guía 3

24 de Octubre de 2007

P1.- Sean X, Y espacios Hausdorff compactos. Muestre que el e.v. generado por $\{f(x)g(y) | f \in \mathcal{C}(X), g \in \mathcal{C}(Y)\}$ es denso en $\mathcal{C}(X \times Y)$.

P2.- A un e.t. que pueda ser sustituido por $\mathbb{R}$ en el Teorema de Tietze se le llama una *retracción absoluta* para espacios normales (AR). Es decir, Y es AR si para todo X normal, $A \subseteq X$ y toda función continua $f : A \rightarrow Y$ posee una extensión $F : X \rightarrow Y$.

1. Sea $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ una familia de espacios. Pruebe que:

$$\prod_{\alpha \in \mathcal{A}} Y_\alpha \text{ es } AR \text{ ssi cada } Y_\alpha \text{ es } AR$$

En particular, $\mathbb{R}^n, [0, 1]^n$ y el cubo de Hilbert son AR .

2. Sea X normal, $A \subseteq X$ cerrado y $f : A \rightarrow S^n$ continua. Pruebe que existe una vecindad $U \supseteq A$ (U depende de f) sobre la cual f puede ser extendida (y sigue estando definida sobre S^n).

P3.- Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach de dimensión infinita. Pruebe que E no puede poseer una base de Hamel (es decir, en el sentido de espacio vectorial) numerable.

P4.- Sea $(E, \|\cdot\|)$ un evn y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E$. Diremos que la sucesión $\sum_{n=0}^k x_n$ es *normalmente convergente* si la serie $\sum_{n=0}^k \|x_n\|$ es convergente en $\mathbb{R}$.

Pruebe que E es Banach si y solo si toda sucesión normalmente convergente es convergente.

P5.- 1. Sea Y un espacio métrico y X subespacio compacto de Y . Definimos $\mathcal{C}_b(Y)$ el espacio vectorial de las funciones continuas y acotadas de Y a valores en $\mathbb{C}$, dotado de:

$$\|f\| := \sup_{y \in Y} |f(y)|$$

Consideramos también el espacio $\mathcal{C}(X)$ dotado de la norma uniforme, que denotamos por $\|\cdot\|$. Consideramos la aplicación lineal $\Phi : \mathcal{C}_b(Y) \rightarrow \mathcal{C}(X)$ tal que $\forall f \in \mathcal{C}_b(Y), \Phi(f) = f|_X$.

a) Pruebe que $(\mathcal{C}_b(Y), \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach.

b) Pruebe que si $f \in \mathcal{C}(Y)$, entonces existe una función $\tilde{f} \in \mathcal{C}_b(Y)$ tal que $\Phi(\tilde{f}) = \Phi(f)$ y $\|\Phi(f)\| = \|\tilde{f}\|$.

c) Pruebe que $\text{Im}(\Phi)$ es densa en $\mathcal{C}(X)$.

d) Sea $g \in \mathcal{C}(X)$, límite uniforme de $(\Phi(f_n))_{n \in \mathbb{N}}$:

- 1) Pruebe que es posible extraer una subsucesión (que llamaremos igual) tal que:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \|\Phi(f_{n+1}) - \Phi(f_n)\| \leq 2^{-n}$$

- 2) Pruebe que la serie $\tilde{f}_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}} (\tilde{f}_{n+1} - \tilde{f}_n)$ converge en $\mathcal{C}_b(Y)$. Llamaremos f a tal límite.

- 3) Pruebe que $\Phi(f) = g$.

e) Deduzca que toda función $g \in \mathcal{C}(X)$ admite una extensión $f \in \mathcal{C}_b(Y)$ tal que $\|f\| = \|g\|$.

2. Sea (Y, d) un espacio métrico y A un subcjo. no vacío de Y . Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitz de constante C . Definimos:

$$(\forall y \in Y) \quad g(y) = \inf_{x \in A} [f(x) + Cd(x, y)]$$

Pruebe que g es una extensión de f lipschitziana de constante C .

P6.- Series de Neumann y aproximaciones sucesivas

Sea E un espacio de Banach, $A : E \rightarrow E$ un operador lineal acotado tal que $\|A\| < 1$ y sea I el operador identidad en E .

1. Pruebe que $I - A$ posee una inversa acotada sobre E dada por la serie de Neumann:

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

y satisface:

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$$

2. Definamos $\varphi_n = \sum_{k=0}^n A^k f$, las sumas parciales de $(I - A)^{-1}$. Pruebe que estas satisfacen:

$$\varphi_{n+1} = A\varphi_n + f$$

Y que para toda $f \in E$ el método de aproximaciones sucesivas (que es iterar la ecuación anterior con $\varphi_0 \in E$ arbitrario) converge a la *única* solución (debe probar esto) de:

$$\varphi - A\varphi = f$$

3. Enuncie este resultado para el operador $J : E \rightarrow E$, con $E = \mathcal{C}([0, 1])$, definido por:

$$(J(f))(x) = \int_0^1 K(x, y)f(y)dy$$

con $K : [0, 1] \times [0, 1]$ continua y tal que: $\sup_{x \in [0, 1]} \int_0^1 |K(x, y)|dy < 1$.

P7.- Espacios l^p

1. Para un conjunto de índices arbitrario I y $\{x_i\}_{i \in I} \subseteq [0, +\infty)$, definimos la suma como sigue:

$$\sum_{i \in I} x_i = \sup_{J \subseteq I, |J| < \infty} \sum_{j \in J} x_j$$

Pruebe que si $\sum_{i \in I} x_i < +\infty$, entonces $J := \{i \in I : x_i \neq 0\}$ es a lo más numerable.

Hint: Pruebe que $J = \bigcup_{n>0} E_n$, con $E_n = \{i \in I : x_i > 1/n\}$.

2. Sea I conjunto. Para $p \in [1, +\infty]$ denotamos por $l^p(I)$ al espacio vectorial de aquellas funciones $x : I \rightarrow \mathbb{C}$ tales que $\sum_{i \in I} |x_i|^p < +\infty$. Definimos además $\|\cdot\|_p$ sobre $l^p(I)$ como sigue:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i \in I} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

Pruebe que $\|\cdot\|_p$ es una norma sobre $l^p(I)$, y que $(l^p(I), \|\cdot\|_p)$ es un espacio de Banach.

Hint: Para probar la desigualdad triangular debe usar la desigualdad de Holder.

3. Pruebe que $(l^p(I), \|\cdot\|_p)$ es separable ssi I es numerable.

Observación: Esto último, en el caso $p = 2$, muestra un ejemplo de un espacio de Hilbert que no es separable. Queda propuesto para cuando corresponda buscar una base ortonormal de este espacio.

P8.- Sea Y un espacio vectorial. Sea S una cierta clase de sucesiones $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de Y , y sea $\mathcal{F}$ una cierta familia de funciones definidas de Y en $\mathbb{R}$. Supongamos que Y y $\mathcal{F}$ satisfacen lo siguiente:

1. Para cada $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in S$ está asociado algún $y \in Y$. Esta asociación se denotará por $y_n \rightarrow y$.
2. Si $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in S$, e $y_n \rightarrow y$, entonces para cada k fijo, la sucesión z_n definida por $z_n = y_k - y_n$ está en S y $z_n \rightarrow y_k - y$.
3. Si $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in S$, e $y_n \rightarrow y$, entonces $f(y_n) \rightarrow f(y)$ para toda $f \in \mathcal{F}$.

4. La clase X de $x \in Y$ tales que $\sup_{f \in \mathcal{F}} f(x) < +\infty$, es un subespacio vectorial de Y y la función $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\|x\| = \sup_{f \in \mathcal{F}} f(x)$$

es una norma sobre X .

5. Si x_n es una sucesión de Cauchy sobre $(X, \|\cdot\|)$, entonces $\{x_n\} \in S$.

Pruebe entonces que X es un espacio de Banach.

P9.- Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, se define la variación total de f como sigue:

$$V_a^b(f) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| : n \in \mathbb{N}, a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b \right\}$$

Consideramos el espacio vectorial de las funciones a variación acotada $BV[A, B]$ como aquellas funciones que poseen variación total finita. Queremos dotar a este espacio de una norma que lo haga Banach.

Sea Y el e.v. de todas las funciones de $[a, b]$ a valores en $\mathbb{R}$. Sea S la clase de sucesiones $\{y_n\}$ de Y tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t) = y(t)$ existe para cada $t \in [a, b]$; lo que denotaremos por $y_n \rightarrow y$. Sea $\mathcal{F}$ la clase de funciones f_Δ definida por:

$$f_\Delta(y) = |y(a)| + \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

donde Δ es una partición de $[a, b]$ dada por los puntos $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ y $\mathcal{F}$ es generada por todos los posibles Δ .

Use el P7 para concluir que $(BV[A, B], \|\cdot\|)$ es Banach. Pruebe además que $BV[a, b]$ no es separable.

P10.- Considere E un subespacio cerrado de $(\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ que solo posee funciones de clase $\mathcal{C}^1$. Pruebe que E es de dimensión finita.