

PL1 (EX2005)

a) $\|P_x\|_{X/Y} = \inf_{y \in Y} \|x - y\|$ es norma sobre X/Y

Notar que está bien definida la norma (no dep. del representante):

$$\text{Si } x_1 \sim x_2: \|P_{x_1}\| = \inf_{y \in Y} \|x_1 - y\| = \inf_{y \in Y} \|x_2 + y_2 - y\| = \inf_{y \in Y} \|x_2 + y\| = \|P_{x_2}\|$$

$x_1 - x_2 = y' \in Y$

Claramente $\|\cdot\|_{X/Y}: X/Y \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$

(i) $\|P(x)\| = \|P(\lambda x)\| = \inf_{y \in Y} \|\lambda x - y\| = |\lambda| \inf_{y \in Y} \|x - y\| = |\lambda| \|P_x\|$

(ii) Sean $x, z \in X$: Para $y_1, y_2 \in Y$

$$\|P(x+z)\| \leq \|x+z - (y_1+y_2)\| \leq \|x-y_1\| + \|z-y_2\| \quad / \inf_{y_1, y_2 \in Y}$$

$$\Rightarrow \|P(x+z)\| \leq \|P_x\| + \|P_z\|$$

(iii) $\|P_x\| = 0 \Leftrightarrow \inf_{y \in Y} \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow \exists y_n \text{ suc. ta. } \|y_n - x\| \rightarrow 0$

$$\Leftrightarrow y_n \rightarrow x \xLeftrightarrow Y \text{ cerrado } x \in Y \Leftrightarrow P_x = 0_{X/Y}$$

$\therefore \|\cdot\|_{X/Y}$ es norma sobre el e.v. X/Y

b) Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suc. de Cauchy.

$$\Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0) (\exists N_0 \in \mathbb{N}) (\forall m, n \geq N_0) \quad \inf_{y \in Y} \|x_m - x_n - y\| < \epsilon$$

$$\Rightarrow \exists \bar{y}_{m,n} \text{ ta. } \|x_m - x_n - \bar{y}_{m,n}\| < \epsilon \quad (\forall m, n \geq N_0)$$

\therefore Sea m_0 ta. $\|x_m - x_{m_0}\| \leq \frac{1}{2} \quad \forall m \geq m_0$

Sea n_1 ta. $\|x_m - x_{n_1}\| \leq \frac{1}{2} \quad \forall m \geq n_1$ con $n_1 \geq m_0$

Sea $m_{k+1} \geq m_k$ ta. $\|x_m - x_{m_{k+1}}\| \leq \frac{1}{2^k} \quad \forall m \geq m_{k+1}$

Esto es posible inductivamente pues $(x_n)_n$ es de Cauchy. Además se tiene lo pedido

$\therefore \|P(x_{m_k} - x_{m_{k+1}})\| \leq \|x_{m_k} - x_{m_{k+1}} - \bar{y}\| \leq \|P(x_{m_k} - x_{m_{k+1}})\| \leq \frac{1}{2^{k-1}}$

Inductivamente: $y_1 = 0$

Fijamos y_2 ta. $\|x_{m_2} - 0 - (x_{m_2} - y_2)\| \leq \frac{1}{2}$

y_1, \dots, y_k fijos. Buscamos y_{k+1} ta. $\|x_{m_k} - y_k - (x_{m_{k+1}} - y_{k+1})\| \leq \frac{1}{2^{k-1}}$

¿Cómo? Sabemos que $\exists \bar{y}$ ta. $\|x_{m_k} - x_{m_{k+1}} - \bar{y}\| \leq \frac{1}{2^{k-1}}$

Luego: $\bar{y} = y_k - y_{k+1} \Rightarrow y_{k+1} = y_k - \bar{y}$