

$\triangleleft z_k = x_{nk} - y_k$ es de Cauchy: $\|z_{k_1} - z_{k_2}\| = \|z_{k_1} - z_{k_1+1} + z_{k_1+1} - z_{k_2}\|$
 $j > k \quad \|z_k - z_j\| \leq \|z_k - z_{k+1}\| + \|z_{k+1} - z_{k+2}\| + \dots + \|z_{j-1} - z_j\|$
 $\leq \sum_{m=k}^{j-1} \frac{1}{2^{m-1}} \leq \frac{1}{2} \sum_{m=k}^{\infty} \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^k} \cdot 2 = \frac{1}{2^k} \xrightarrow{k, j \rightarrow \infty} 0$

Luego z_k es de Cauchy en $\|\cdot\|_X$

$\Rightarrow (z_k)_k$ converge en X : $z_k \xrightarrow{\|\cdot\|} z$

Además $[z_k] = [x_{nk} - y_k] = [x_{nk}]$. Luego $[x_{nk}] \rightarrow [z]$. En efecto:

$$\|[x_{nk}] - [z]\| \leq \|x_{nk} - z - 0\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

Finalmente, sucesión de Cauchy + \exists pto de acum. $\Rightarrow [x_{nk}]$ converge a $[z]$

c) $x \in X/Y \Rightarrow \exists \varphi: X \rightarrow \mathbb{K}$ LC. t.q. $\varphi(y) = 0 \quad \forall y \in Y$ y $\varphi(x) = \inf \{\|x - y\| : y \in Y\}$

Usaremos el siguiente corolario de Hahn-Banach sobre X/Y .

Corolario: Si E es e.v.m. y $x \in E \exists l \in E^*$ con $\|l\| = 1$ y $l(x) = \|x\|$

Luego, existe $l \in (X/Y)^*$ t.q. $\|l\| = 1$ y $l([x]) = \|x\|$

Tomamos:

$$\varphi: X \xrightarrow[\text{LC}]{P} X/Y \xrightarrow[\text{LC}]{l} \mathbb{K} \in X^*$$

Notar que $\forall y \in Y \quad P_y = [0]_{X/Y} \Rightarrow \varphi(y) = l(P_y) = l([0]) = 0$

Además: $\varphi(x) = l(P_x) = \|x\| = \inf_{y \in Y} \|x - y\|$

Lo que prueba lo pedido \square