PAUTA P2 C2 ANÁLISIS 2007 (1)

(i) Supongamos $h(X) \subsetneq X$, notemos que por ser X cpto

$\Rightarrow h(X)$ es compacto $\Rightarrow h(X)$ es cerrado pues X es métrico

y en particular Hausdorf. Luego si $x_0 \notin h(X) \Rightarrow d(x_0, h(X)) > 0$

Sea $x_0 \in X \setminus h(X)$, definiendo $x_n = h(x_{n-1})$ $n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow d(x_n, x_m) = d(h^n(x_0), h^m(x_0))$$

Supongamos spg $m < n$

$$\Rightarrow d(x_n, x_m) = d(h^m(h^{n-m}(x_0)), h^m(x_0)) = d(h^{n-m}(x_0), x_0) \geq a > 0$$

pues h es isometría $(a = dist(x_0, h(X)))$

Esto último implica que x_n no puede tener subsucesiones convergentes

(esto pues ninguna subsucesión es de Cauchy) $\rightarrow\!\leftarrow$

Pues X es cpto y por ser métrico es secuencialmente compacto.

(ii) ·) Por ser f y g isometrías $\Rightarrow f$ y g son inyectivas

··) Por (i) $g \circ f$ es biyectiva (pues es isometría de X en X)

esto implica necesariamente que g es sobre. y luego biyectiva

···) Como g es biyectiva $\Rightarrow g^{-1}$ está bien def. y es biyectiva.

Luego $\underbrace{g^{-1}}_{biy} \circ \underbrace{(g \circ f)}_{biy} = id_X \circ f = f$ es biyectiva

por ser composición de biyectivas $\Rightarrow f$ sobre ✓

i) Sea $x \in X$, como $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Delta}$ es loc. finita entonces existe $V \in N_x$ (que suponemos abta. sin pérdida de generalidad), tal que

$$V \cap A_\lambda = \emptyset \quad \forall \lambda \in \Delta \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$$

$$\Rightarrow A_\lambda \subseteq V^c$$

$$\Rightarrow \overline{A_\lambda} \subseteq \overline{V^c} = V^c \quad \text{(pues } V^c \text{ es cerrado)}$$

$$\Rightarrow \overline{A_\lambda} \cap V = \emptyset \quad \forall \lambda \in \Delta \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$$

Luego $\{\overline{A_\lambda}\}_{\lambda\in\Delta}$ es localmente finita.

Veamos ahora que $\bigcup_{\lambda\in I} \overline{A_\lambda}$ es cerrado o equivalentemente que $\bigcap_{\lambda\in I} \overline{A_\lambda}^c$ es abto: Sea $x \in \bigcap_{\lambda\in I} \overline{A_\lambda}^c \Rightarrow \forall \lambda \in I \;\; x \notin \overline{A_\lambda} \quad (*)$

Por ser $\{\overline{A_\lambda}\}_{\lambda\in\Delta}$ un recubrimiento localmente finito entonces existe $V \in N_x$ (spg abta) tal que

$$V \cap \overline{A_\lambda} = \emptyset \quad \forall \lambda \in \Delta \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$$

$$\Rightarrow V \subseteq \overline{A_\lambda}^c$$

$$\Rightarrow V \subseteq \bigcap_{\lambda\in\Delta\setminus\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}} \overline{A_\lambda}^c \subseteq \bigcap_{\lambda\in I\setminus\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}} \overline{A_\lambda}^c$$

Notemos que

$$W = V \cap \bigcap_{\lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \cap I} \overline{A_\lambda}^c$$ y abto pues es $\cap$ finita de abtos

es un abierto que contiene a x (por (*))

Entonces $$W = V \cap \bigcap_{\lambda \in \{\lambda_1,\dots,\lambda_n\} \cap I} \overline{A_\lambda}^c \subseteq \underbrace{\bigcap_{\lambda \in I \setminus \{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}} \overline{A_\lambda}^c \cap \bigcap_{\lambda \in \{\lambda_1,\dots,\lambda_n\} \cap I} \overline{A_\lambda}^c}_{\lambda \in I}$$

$$x \in W \subseteq \bigcap_{\lambda \in I} \overline{A_\lambda}^c \Rightarrow \bigcap_{\lambda \in I} \overline{A_\lambda}^c \text{ es abto.}$$

(ii) $\Rightarrow$) Si B es cerrado siempre se tiene que $B \cap A_\lambda$ es cerrado en τ_{A_λ}

$\Leftarrow$) Si $B \cap A_\lambda$ es cerrado en $A_\lambda \Rightarrow B \cap A_\lambda = F \cap A_\lambda$

con F cerrado para τ, como A_λ es cerrado para τ

tenemos que $B \cap A_\lambda$ es cerrado para τ pues es intersección de dos cerrados para τ. (F y A_λ)

Notemos que si $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Delta}$ es loc. finita $\Rightarrow \{B \cap A_\lambda\}_{\lambda \in \Delta}$ loc. finita.

Pues si para $x \in X$ $\exists$ $V \in N_x$ tq $V \cap A_\lambda = \emptyset$ para $\lambda \in \Delta \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$

$\Rightarrow V \cap A_\lambda \cap B \subseteq V \cap A_\lambda = \emptyset$ para $\lambda \in \Delta \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$

③

y como los $B\cap A_\lambda$ son cerrados para τ

$\Rightarrow \{B\cap A_\lambda\} = \{\overline{B\cap A_\lambda}\}$

Luego por (i) $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B\cap A_\lambda$ es cerrado

pero $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B\cap A_\lambda = B\cap \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = B\cap X = B$ ✓

(iii) Probaremos X disconexo $\Leftrightarrow$ negación de la prop.

$\Leftarrow$] Supongamos que existe un recubrimiento abierto $\mathcal{R}$

tq $\exists\ A, B\in\mathcal{R}$ tq $\forall$ secuencia finita $A_1,\dots,A_n$ en $\mathcal{R}$

tal que $A_1 = A$ y $A_n = B$, $\exists\ i\in\{1,\dots,n-1\}$ tq $A_i\cap A_{i+1} = \emptyset$

Sea $S = \{C\in\mathcal{R} : \exists$ secuencia finita $A_1,\dots,A_n$ tq $A_1 = A,\dots, A_n = C$ y $A_i\cap A_{i+1}\neq\emptyset\}$

Claramente $A\in S$ y $B\notin S$

Luego $\emptyset\neq A\subseteq \bigcup_{C\in S} C = C_1$ y $\emptyset\neq B\subseteq \bigcup_{C\in S^c} C = C_2$

y también se tiene que C_1 y C_2 son abiertos

Además C_1 y C_2 son disjuntos pues de no ser así

$\exists\ C'\in S$ y $C''\in S^c$ tq $C'\cap C''\neq\emptyset$

Como $C' \in S$ $\exists$ $A_1 = A, A_2 \dots A_n = C'$ con $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$

y como $C' \cap C'' \neq \emptyset$ $\Rightarrow \exists A_1 = A, \dots, A_n = C', A_{n+1} = C''$

con $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ $\Rightarrow C'' \in S \rightarrow\!\!\times\!\!\leftarrow$ (pues $C'' \in S^c$)

Finalmente notemos que $C_1 \cup C_2 = \bigcup_{C \in R} C = X$

En resumen:

$\Rightarrow X$ conexo

C_1, C_2 abiertos no vacíos

$\cdot\ C_1 \cap C_2 = \emptyset$

$C_1 \cup C_2 = X$

$\Rightarrow X$ disconexo

$\Rightarrow]$ Si X es disconexo $\exists A, B \in Z$ con $A \cup B = X$ y $A \cap B = \emptyset$

entonces $R = \{A, B\}$ es un cubrimiento abierto que no satisface la propiedad.

(iv) $\Leftarrow]$ Haciendo el mismo razonamiento definimos de la misma forma C_1 y C_2

Como $C_1 \cap A_\lambda = \begin{cases} A_\lambda & \text{si } A_\lambda \in S \\ \emptyset & \text{si no} \end{cases}$

Tenemos que $C_1 \cap A_\lambda$ es cerrado en A_λ

(ii) $\Rightarrow C_1$ es cerrado

De la misma manera resulta que C_2 es cerrado

Por el mismo razonamiento de (iii) se demuestra que $C_1 \cap C_2 = \emptyset$

y que $C_1 \cup C_2 = X$. $\Rightarrow$ X disconexo.

$\Rightarrow$] Si X es disconexo $\exists$ A, B cerrados con $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = X$

$\Rightarrow$ $\mathcal{R} = \{A, B\}$ es un cubrimiento (loc. finito pues es finito)
y cerrado

que no satisface la propiedad.